

# Modellierung und Simulation der Schallwellenausbreitung von luftgekoppelten Ultraschall Gruppenwandlern

**Modelling and simulation of soundwave propagation from air-coupled ultrasonic arrays**

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation von René Golinske aus Oranienburg

Tag der Einreichung: 04. Dezember 2018, Tag der Prüfung: 18. Februar 2019

Darmstadt — D 17

1. Gutachten: Prof. Dr. mont. Mario Kupnik
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Mussenbrock



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Elektrotechnik und Infor-  
mationstechnik  
Fachgebiet Mess- und Sensortechnik

Modellierung und Simulation der Schallwellenausbreitung von luftgekoppelten Ultraschall Gruppenwandlern

Modelling and simulation of soundwave propagation from air-coupled ultrasonic arrays

Genehmigte Dissertation von René Golinske aus Oranienburg

1. Gutachten: Prof. Dr. mont. Mario Kupnik

2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Mussenbrock

Tag der Einreichung: 04. Dezember 2018

Tag der Prüfung: 18. Februar 2019

Darmstadt – D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-113779

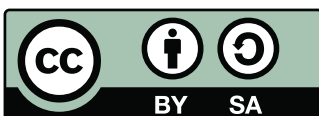
URL: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/11377>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

---

## Erklärung zur Dissertation

---

Hiermit versichere ich, die vorliegende Dissertation ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 04. Dezember 2018

---

(René Golinske)

---

## Danksagung

---

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl Theoretische Elektrotechnik der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus. Zum erfolgreichen Gelingen dieser Arbeit haben zahlreiche Personen beigetragen, bei denen ich mich an dieser Stelle bedanken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. mont. Mario Kupnik, der diese Arbeit anregte und der mich durch das gute Betreuungsverhältnis wissenschaftlich und methodisch während der Bearbeitungsphase unterstützte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Mussenbrock danke ich recht herzlich für die hervorragende Zusammenarbeit und seine äußerst nützlichen Vorschläge zur Lösung der theoretischen Problemstellungen und deren Umsetzung.

Außerdem bin ich den Mitarbeitern der Lehrstühle Theoretische Elektrotechnik und Allgemeine Elektrotechnik sehr dankbar für die gute und kollegiale Arbeitsatmosphäre sowie die konstruktiven Diskussionen zum Thema der Dissertation. Besonders möchte ich an dieser Stelle Herrn Dr.-Ing. Jan Trieschmann für das aufwendige Korrekturlesen der Dissertation und seine fachlichen Ratschläge bedanken.

Ebenso bin ich den Mitarbeitern des Fachgebiets Mess- und Sensortechnik der TU Darmstadt für die freundliche Aufnahme und deren Hilfestellungen bei der Umsetzungen von messtechnischen Problemstellungen sehr dankbar. Hierbei gilt mein besonderer Dank Herrn Matthias Rutsch, der mich bei der Durchführung von den Messungen unermüdlich unterstützte. Darüber hinaus danke ich auch Herrn Axel Jäger und Alexander Unger für die offenen Diskussionen und die Ratschläge zur anwendungsorientierten Realisierung.

Besonders möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die stets offene Ohren für mich hatten und mich bei der Umsetzung der Arbeit motiviert und unterstützt haben. Hierbei gilt mein besonderer Dank meinen Eltern Annette und Eberhard, die mich auf dem Weg der Promotion begleitet und auf vielseitige Weise unterstützt haben. Ebenso danke ich meinen Großeltern für ihre ermutigenden Worte. Abschließend gilt mein Dank meiner Freundin Anne Blank für ihre Begeisterung in meine Arbeit und ihr entgegengebrachtes Interesse daran.



---

## Zusammenfassung

---

Die effiziente Modellierung zur Erforschung der Schallabstrahlung ermöglicht eine geeignete Entwicklung und Fertigung von Prototypen für Wandler von luftgekoppelten Ultraschallanwendungen. Dabei sollen die Simulationen möglichst realitätsnah die physikalischen Gesetzmäßigkeiten abbilden und sich gleichzeitig ressourcensparend auf die Rechenleistung auswirken. Die wesentliche Herausforderung für die Modellierung von Abstrahlungsphänomen ist die Simulation von großvolumigen Feldern bei einer relativ kurzen Wellenlänge. Anhand der Methoden, bei denen das gesamte Gebiet diskretisiert wird, ergibt sich für die Simulation eine große Knotenanzahl, welche mit der derzeitigen Rechentechnik für großvolumige Ultraschallfelder nicht numerisch zu lösen ist. Alternative Methoden beziehen sich auf die umschließende Oberfläche des Volumens, wobei häufig zur Berechnung des Schallfeldes das Rayleigh Integral verwendet wird. Jedoch ist dieses Integral ein idealisierter Sonderfall, mit dem das simulierte Schallfeld nur für einen kleinen Öffnungswinkel die physikalischen Eigenschaften der Ultraschallwandler abbildet. Aufgrund der Einschränkungen der bisherigen Methoden wird daher ein Modell entwickelt, mit dem das Schallfeld für einen großen Öffnungswinkel berechnet werden kann und gleichzeitig der Simulationsaufwand weniger rechenintensiv ist. Dieses Modell basiert auf der Randelemente Methode (BEM), bei der die Simulation des Schallfeldes über die umschließende Oberfläche des Volumens erfolgt. Durch den Einsatz paralleler Programmieretechniken erfolgt eine signifikante Reduzierung der Rechenzeit und dadurch ergeben sich eine Vielzahl von möglichen virtuellen Experimenten zur Charakterisierung der Schallausbreitung.

Die erstellten Modelle basieren auf den linearisierten Grundgleichungen der Akustik, aus denen die Herleitung der Wellengleichung erfolgt. Mithilfe der Fourier Transformation sind die zeitlich harmonischen Größen in den Frequenzbereich überführt und daher geht die Wellengleichung in die Helmholtz Gleichung über. Diese Differentialgleichung wird mit dem zweiten Green'schen Satzes in das Kirchhoff Helmholtz Integral (KHI) überführt und zum Lösen des Schallfeldes verwendet. Anhand der Betrachtung der Schallausbreitung in einen Halbraum durch das Einführen einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand vereinfacht sich das Integral und dadurch reduziert sich der Rechenaufwand. Das hierbei hergeleitete Rayleigh Integral eignet sich zur Ermittlung von zwei analytischen Lösungen, mit denen die Verifikation der Simulationsergebnisse erfolgt.

Die Simulation des Schallfeldes erfolgt zunächst mit kommerziellen und frei erhältlichen Programmen, welche auf den Methoden der Finiten Elemente (FEM) und des Rayleigh Integrals mit der räumlichen Sprungantwort beruhen. Aufgrund der Modelleinschränkungen kann die Schallabstrahlung nicht ausreichend genug die physikalischen Gesetzmäßigkeiten im gesamten Volumen abbilden oder es können nicht allgemeine geometrische Formen von Ultraschallwandler und Gruppenwandlern verwendet werden. Dennoch eignet sich das Rayleigh Integral zur Schallfeldsimulation in einem Bereich mit einem kleinen Öffnungswinkel, sodass die erste Modellbildung mit dieser Methode geschieht. Durch einen parallelen Programmablauf können große Schallfelder mit einer Vielzahl von Feldpunkten innerhalb kürzester Zeit berechnet werden. Anhand der gewonnen Erkenntnisse zur Modellumsetzung erfolgt eine Modellbildung auf der Grundlage des KHI's. Dieses Modell berücksichtigt die vorgegebene geometrische Ausdehnung des Ultraschallwandlers und der umgebenen schallharten ebenen Wand. Dadurch entspricht das Modell genauer den geometrischen Gegebenheiten und die simulierte Schallausbreitung spiegelt die physikalischen Gesetzmäßigkeiten besser wieder. Die bisherigen Modelle ermöglichen die Simulation der Schallausbreitung in einem Feldpunkt, jedoch wird für die Validierung ein Mikrophon verwendet, welches eine geometrische Ausdehnung besitzt. Dieses wird durch die Mittelung über die Oberfläche in dem Modell berücksichtigt und kann dabei eine beliebige Position und Orientierung zum Ultraschallwandler aufweisen. Abschließend wird das Modell auf einen Gruppenwandler angewendet, mit dem die Ansteuerung sowohl der Amplitude und der Phase der einzelnen Ultraschallwandler möglich ist. Mithilfe der Phasensteuerung der Ultraschallwandler zueinander erfolgt die Ausrichtung der Schallausbreitung.

---

Anhand der analytischen Lösungen wird gezeigt, dass mit dem entwickelten Modell auf Basis des Rayleigh Integrals die geforderte Genauigkeit von  $\pm 1\%$  erreicht wird. Durch die Verwendung von parallelen Programmier Techniken insbesondere durch die Verwendung der GPU kann die Rechenzeit bis zu einem Faktor 500 reduziert werden. Dadurch ermöglichen sich neue Simulationsmöglichkeiten von großvolumigen oder sehr hochaufgelösten Schallfeldern. Aus diesem Grund ist das entwickelte Modell sehr schnell im Vergleich zu den anderen Methoden und verfügt dennoch über die erforderliche Genauigkeit. Dennoch wird an einem exemplarischen Ultraschallwandler gezeigt, dass die simulierte Schallausbreitung mit dem Rayleigh Integral nur innerhalb eines Öffnungswinkels von  $\vartheta = \pm 50^\circ$  gültig ist. Dieser Unterschied resultiert aus der Annahme, dass der Ultraschallwandler sich in einer unendlich ausgedehnten Ebene befindet, während beim Modell mit dem KHI eine feste Größe der umgebenen Wand vorgenommen wird. Daraus lässt sich ableiten, dass die Simulation mit dem Rayleigh Integral ausschließlich in einem kleinen Bereich die physikalischen Eigenschaften der Ultraschallwandler abbildet. Ein Vergleich zwischen dem erstellten Modell mit dem KHI und einem Modell aus einem kommerziellen Programm zeigt eine gute Übereinstimmung, sodass die beiden numerischen Lösungen nur um  $\pm 2,5\%$  voneinander abweichen. Eine Ausnahme hiervon bilden die Nulldurchgänge, in denen die Abweichung größer ausfällt. Hierbei ist das entwickelte Programm leistungsfähiger, weil eine wesentlich größere Knotenanzahl zum Simulieren verwendet werden kann und dadurch eine höhere Genauigkeit erreicht wird oder die Simulation für höhere Frequenzen möglich ist. Darüber hinaus ist die Rechenzeit für diesen Testfall um einen Faktor 5 bis 10 kleiner. Bei der Schallfeldsimulation des Gruppenwandlers stimmen die Ergebnisse bis zu einem Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 84^\circ$  ebenfalls gut überein.

Die Validierungen mit den Messergebnissen offenbaren, dass die erstellten Modelle gut die Schallausbreitung abbilden. Jedoch ist es äußerst wichtig, die geometrischen und physikalischen Randbedingungen genau zu ermitteln, weil diese einen wesentlichen Einfluss auf die Schallausbreitung besitzen. Darüber hinaus muss bei der Verwendung dieses Modells darauf geachtet werden, dass der Schalldruckpegel stets kleiner als 140 dB ist. Ab diesem Schalldruckpegel kommen Nichtlinearitäten in dem Schallfeld verstärkt zum tragen und daher bildet die Simulation mit diesem Modell die physikalischen Erscheinungen nicht mehr richtig ab.

---

## Abstract

---

The efficient modelling and investigation of sound radiation enables a suitable development and manufacturing of prototypes for air-coupled ultrasonic applications. The simulations have to reflect the physical laws as realistic as possible and have an effect on saving the resources of computing performance. The main challenge of modelling radiation phenomena is to simulate the field of large volumina with a relatively short wavelength. The methods, which discretizes the entire volume, require a huge amount of nodes and today's available computers are not able to solve these problems for large ultrasonic fields. Other methods use closed surfaces around the volume at which the Rayleigh integral is commonly used. However, this integral is an idealized special case, which represents the physical properties only for a small opening angle of the simulated acoustic field of the ultrasonic transducers. Since these methods are limited, a model is developed, which is able to simulate the acoustic field for a wide opening angle and which is less computationally intensive. This model is based on the boundary element method (BEM) in which the sound field is calculated over the closed surface of a volume. A significant reduction of computational time, achieved via the application of parallel program techniques, and, thus, providing a large number of possible virtual experiments for the characterization of the sound propagation.

The models created are based on the linear equations of acoustics, from which the wave equation is derived. By using the Fourier transform, the time harmonic quantities are transferred to the frequency domain, and, thus, the wave equation goes over to the Helmholtz equation. This differential equation is transformed to the Kirchhoff Helmholtz Integral (KHI) by using the second theorem of Green and is applied to solve the acoustic field. By considering the sound propagation in a half space by introducing an infinite extended rigid baffle, the integral is simplified, and, thus, the computational effort is reduced. The Rayleigh Integral derived is suitable for determining two analytical solutions that allow verification of the simulation results.

At the beginning, the simulation is done by commercially, available free software tools, which are based on the Finite Element Method (FEM) and the Rayleigh Integral with the spatial impulse response. Due to the limitations of the models, the sound radiation cannot sufficiently represent the physical laws in the entire volume, the arbitrary geometric shape of the transducer or the array. The Rayleigh Integral is suitable for sound field simulation of a small opening angles, so that the modelling starts with that method. By using parallel programming, large sound fields consisting of a huge number of field points can be calculated within a short amount of time. Based on this model implementation, a model is created on the basis of the KHI. This model takes into account the given geometric extent of the ultrasonic transducer and the surrounding rigid baffle. The state-of-the-art models are able to simulate the sound propagation in a field point, but the validation is done by a microphone, which has a finite size. This is taken into account in the model by averaging over the surface and thereby it can be located and oriented arbitrary to the ultrasonic transducer. The model is applied to a two dimensional phased array, with which the control of the amplitude and phase of each ultrasonic transducer element is possible. The orientation of sound propagation is done by using the phase control of the ultrasonic transducers. The analytical solution shows good agreement between the developed model based on the Rayleigh Integral. The required accuracy of  $\pm 1\%$  is achieved. By using parallel programming techniques, especially the GPU, the computing time can be reduced by up to a factor of 500. This opens new simulation capabilities of large volumes or high resolution acoustic fields. The developed model is therefore very fast compared to other methods and still has the required accuracy. It is shown with an exemplary ultrasonic transducer that the simulated sound propagation calculated based on the Rayleigh Integral only is valid within an opening angle of  $\vartheta = \pm 50^\circ$ . This difference results from the assumption that the ultrasonic transducer is located in an infinitely rigid baffle, whereas in the model with the KHI the surrounding rigid baffle is implemented with a fixed size. Therefore, it can be deduced that the simulation with the Rayleigh Integral indicates the physical properties from the ultrasonic transducers only for a small area.

---

A comparison between the created model with the KHI and a model based on a commercial program shows good agreement, so that the two numerical solutions differ merely by  $\pm 2,5\%$ . The zero crossings are an exception in which the deviation is larger. The developed program is more efficient, because a substantially larger number of nodes can be used for the simulation and thereby a higher accuracy is achieved or the simulation of higher frequencies is possible. In addition, the computing time for this test case is 5 to 10 times shorter. The results of sound field simulation of an array show good agreement within an opening angle up to  $\vartheta = \pm 84^\circ$ .

The validations with the measurement results reveal that the models created represent the sound propagation well. However, it is important to determine the geometrical and physical boundary conditions accurately, because these influence the sound propagation significantly. Furthermore, when using this model, one has to ensure that the sound pressure level is below 140 dB. At higher sound pressure levels, the influence of the nonlinearities is more significant, and, thus, the simulation with the developed model cannot reproduce the physical phenomena correctly.

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>Liste der verwendeten Symbole</b>	<b>xiv</b>
<b>Akronyme und Abkürzungen</b>	<b>xvi</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation und Zielsetzung der Arbeit . . . . .	1
1.2. Aufbau der Arbeit . . . . .	2
1.3. Wissenschaftliche Themenschwerpunkte . . . . .	3
<b>2. Schallwellenausbreitung in Fluiden</b>	<b>6</b>
2.1. Akustische Grundgleichungen . . . . .	6
2.2. Lineare Wellengleichung . . . . .	8
2.3. Kirchhoff-Helmholtz Integral . . . . .	11
2.4. Halbunendliche Räume . . . . .	14
2.4.1. Rayleigh Integral . . . . .	14
2.4.2. Analytische Lösungen für kreisförmige Kolbenstrahler . . . . .	18
2.5. Abschätzung zu den Vereinfachungen . . . . .	23
2.5.1. Dämpfung des Schallfeldes durch das Medium . . . . .	23
2.5.2. Vorhandensein von Nichtlinearitäten . . . . .	26
<b>3. Schallabstrahlung von ebenen Ultraschallwandlern</b>	<b>29</b>
3.1. Modellbildung zur Schallabstrahlung von Ultraschallwandlern . . . . .	29
3.2. Programme zur Schallfeldberechnung . . . . .	30
3.2.1. COMSOL . . . . .	32
3.2.2. Field II . . . . .	36
3.3. Numerische Integrationsverfahren . . . . .	43
3.4. Simulation der Schallwellenausbreitung von Ultraschallwandlern in einer unendlich ausgedehnten Ebene . . . . .	48
3.4.1. Mathematische Formulierung . . . . .	48
3.4.2. Triangulierung der Ultraschallwandler . . . . .	50
3.4.3. Implementierung des Modells in Mathematica . . . . .	52
3.4.4. Auswertung der erstellten Programme . . . . .	55
3.5. Ultraschallwandler in einer schallharten Wand mit finiter Ausdehnung . . . . .	60
3.5.1. Mathematische Formulierung . . . . .	61
3.5.2. Schallfeldberechnung und Vergleich mit kommerzieller Software . . . . .	65
3.5.3. Vergleich mit unendlich ausgedehnter Ebene . . . . .	71
3.6. Bewertung der Berechnungsmethoden . . . . .	73
<b>4. Schallfeldberechnung von beliebigen Ultraschallwandler-Konfigurationen</b>	<b>75</b>
4.1. Eigenschaften der Ultraschallwandler für die Simulation der Schallausbreitung . . . . .	75
4.2. Koaxiale Wandlerkonfigurationen . . . . .	76
4.3. Messung zur Charakterisierung der Schallfeldausbreitung von Ultraschallwandlern . . . . .	80
4.4. Schallfeldmessung von koaxial ausgerichteten Ultraschallwandlern . . . . .	83
4.5. Modellbildung und Implementierung für eine allgemeine Anordnung . . . . .	89
4.6. Vergleich zwischen punktförmigen und flächenbehafteten Empfängern im Fernfeld . . . . .	91

---

4.7. Schallfeldmessung und Validierung des Modells . . . . .	94
<b>5. Schallabstrahlung von Ultraschall Gruppenwandlern</b>	<b>100</b>
5.1. Aufbau und Modellbildung des Gruppenwandlers . . . . .	100
5.2. Ansteuerung der Ultraschallwandler des Gruppenwandlers . . . . .	104
5.3. Simulation des Schallfeldes und Vergleich mit einem Modell in COMSOL . . . . .	105
5.4. Schallfeldvermessung und Simulation des Ultraschall Gruppenwandlers . . . . .	107
<b>6. Schlussfolgerung und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>A. Verifikation der Schallfeldsimulation im Fernfeld für das Programm Field II</b>	<b>117</b>
<b>B. Simulation des Schalldrucks für coaxial ausgerichtete Sender und Empfänger</b>	<b>118</b>
<b>C. Messergebnisse für die coaxiale Anordnung von Sender und Empfänger Konfigurationen</b>	<b>119</b>
C.1. Messung der physikalischen Eigenschaften der umgebenen Luft . . . . .	119
C.2. Schalldruckmessung von coaxialer Sender und Empfänger Anordnungen . . . . .	121

---

## Abbildungsverzeichnis

---

2.1. Lösung der Helmholtz Gleichung über das Oberflächenintegral mithilfe des KHI's. Die Schallabstrahlung in den Außenraum $B_a$ erfolgt durch die Schallquellen, die sich auf der umschlossenen Fläche $F$ befinden [34]. . . . .	12
2.2. Modell zur Schallfeldberechnung in einen Halbraum von einer akustischen Apertur, die sich in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand befindet [35]. . . . .	15
2.3. Modellbildung zur Berechnung der Schallabstrahlung von einem kreisförmigen Ultraschallwandler in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand mit dem Rayleigh Integral. . . . .	18
2.4. Berechnung des Schalldrucks entlang der z-Achse für einen kreisförmigen Ultraschallwandler mit dem Radius $a = 6,4\text{ mm}$ in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Der ermittelte Schalldruck wird auf den Druck auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers bezogen. . . . .	20
2.5. Berechnung des Schalldruckpegels im Fernfeld für kreisförmige Kolbenstrahler in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Hierbei ist der Schalldruckpegel auf das Maximum normiert. Das Fernfeld wurde für einen Halbkreis in einem Abstand von 1 m zu dem Kolbenstrahler berechnet. . . . .	22
2.6. Schallabsorption durch das Medium Luft bei einem stationären Druck $p_0 = 1\text{ atm}$ und einer Umgebungstemperatur von $T = 293.15\text{ K}$ für verschiedene relative Luftfeuchtigkeiten. . . . .	25
3.1. Wandlungsprinzipien elektroakustischer Wandler für das Aussenden und Empfangen von Schallwellen [3]. . . . .	30
3.2. Aufbau eines rotationssymmetrischen COMSOL Modells (FEM) zur Berechnung des Schallfelds von kreisförmigen Ultraschallwandlern in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. . . . .	34
3.3. Fehleranalyse für das halbkugelförmige COMSOL Modell bezogen auf die analytische Lösung des Schalldrucks auf der Hauptachse nach der Gleichung (2.47). Das Schallfeld wird durch einen Ultraschallwandler mit dem Radius $a = 6,4\text{ mm}$ und der Erregungsfrequenz $f = 40\text{ kHz}$ verursacht. . . . .	35
3.4. Die benötigten Rechenzeiten für die COMSOL Modelle in Abhängigkeit der Knoten pro Wellenlänge und der Art des Modells. . . . .	36
3.5. Grundsätzliches Modell zur Simulation in Field II, bei dem die Reziprozität des akustischen Systems verwendet wird. Der Feldpunkt wird in die Ebene des akustischen Wandlers projiziert. Die ausgehenden Kugelwellen vom Feldpunkt schneiden die Ebene und es bilden sich Schnittkreise [55]. . . . .	38
3.6. Maximal absoluter Fehler $ \varepsilon_z $ für die Simulation entlang der z-Achse im Vergleich zur analytischen Lösung entsprechend der Gleichung (2.47). . . . .	40
3.7. Durchschnittlicher absoluter Fehler $ \overline{\varepsilon_z} $ entlang der z-Achse im Vergleich zur analytischen Lösung. . . . .	41
3.8. Rechenzeit für die Simulation des Schallfeldes von 1000 Feldpunkten entlang der z-Achse mit dem Programm Field II. . . . .	42
3.9. Verifikation der numerischen Integrationsmethoden anhand des durchschnittlichen absoluten Fehlers $ \overline{\varepsilon_z} $ bezogen auf die analytische Lösung des Schalldrucks entlang der z-Achse nach der Gleichung (2.47). . . . .	45
3.10. Die benötigten Rechenzeiten zur numerischen Integration mit den implementierten Integrationstechniken in Mathematica. . . . .	46



3.11. Dreidimensionales Schallfeld in der $xz$ -Ebene für einen kreisförmigen Kolbenstrahler mit dem Radius $a = 6,4\text{mm}$ und der Frequenz $f = 40\text{kHz}$ , welches mit der numerischen Integrationstechnik von Gauß-Kronrod berechnet wurde. . . . .	47
3.12. Qualität der triangulierten Elemente mit dem DistMesh-Algorithmus [13] für einen Kreis mit 100 Elementen. Das verwendete Qualitätsmerkmal ist das Verhältnis zwischen dem Innen- und Außenradius nach der Gleichung (3.14). . . . .	52
3.13. Approximation des Kreises als triangulierte Fläche mit dem DistMesh-Algorithmus [13]. .	53
3.14. Fehleruntersuchung des simulierten Schalldrucks von den triangulierten Kolbenstrahlern mit einer unterschiedlichen Anzahl von Gauß'schen Punkten in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Hierbei ist der Fehler entlang der $z$ -Achse bis zu $z_p = 1\text{ m}$ (a) und $z_p = 0,05\text{ m}$ (b) dargestellt. . . . .	56
3.15. Maximaler absoluter Fehler $ \varepsilon_z $ der Schallfeldberechnung für einen Kolbenstrahler entlang der $z$ -Achse. . . . .	57
3.16. Grenzwert des Fehlers für die Schallfeldberechnung eines Kolbenstrahlers auf der $z$ -Achse im Fernfeld. . . . .	58
3.17. Die benötigten Rechenzeiten mit sequentiellen und parallelen Programmieretechniken zur Berechnung des Schallfeldes entlang der $z$ -Achse für eine Gauß'sche Quadratur der fünften Ordnung. . . . .	59
3.18. Modell zur Schallfeldberechnung von einem Ultraschallwandler in einer schallharten Wand mit einer vorgegebenen Ausdehnung. . . . .	61
3.19. Verteilung des Schalldruckpegels auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers mit dem Radius $a = 6,4\text{mm}$ und der umgebenen Wand mit einem Radius $a_{\text{wand}} = 100\text{mm}$ . . . . .	67
3.20. Schallwellenausbreitung eines Ultraschallwandlers mit dem Radius $a = 6.4\text{mm}$ in einer schallharten Wand mit dem Radius $a_{\text{wand}} = 100\text{mm}$ . Die Abbildungen zeigen den Schalldruckpegel für das BEM Modell in Mathematica (a), für das COMSOL Modell (b) und für die Differenz der beiden Modelle zueinander (c). . . . .	69
3.21. Untersuchung der Symmetrie für die Modelle mit der BEM in Mathematica (a) und der BEM in COMSOL (b). Hierbei wird die Differenz des Schalldruckpegels für die gespiegelten Feldpunkte an der $z$ -Achse gebildet. . . . .	70
3.22. Charakteristische Schallwellenausbreitung eines Ultraschallwandlers mit dem Radius $a = 6.4\text{mm}$ in einer finiten schallharten Wand mit dem Radius $a_{\text{wand}} = 100\text{ mm}$ (a) und einer idealisierten unendlich ausgedehnten Ebene (b). Abbildung (c) zeigt den Unterschied des Schalldruckpegels von den beiden Modellen zueinander. . . . .	72
4.1. Schallwellenausbreitung entlang der $z$ -Achse eines kreisförmigen Ultraschallwandlers mit einem Radius $a = 6,4\text{mm}$ für die Erregungsfrequenzen $f = 40\text{ kHz}$ (a), $f = 80\text{ kHz}$ (b) und $f = 160\text{ kHz}$ (c). Die Empfänger haben einen Radius von $b = 1,5\text{ mm}$ , $b = 3,0\text{ mm}$ und $b = 6,4\text{ mm}$ . Hinzu wird die analytische Lösung, welche einem Radius $b = 0\text{ mm}$ entspricht, dargestellt. . . . .	79
4.2. Aufbau der wesentlichen Komponenten des Messplatzes zur Schallfeldcharakterisierung der Ultraschallwandler innerhalb des reflexionsarmen Raums (Fachgebiet Mess- und Sensortechnik, TU Darmstadt). . . . .	82
4.3. Zeitlicher Verlauf des ausgesendeten Signals von dem Murata MA40B8S in einem Abstand von $z_p = 150\text{ mm}$ (a) und (c) und einem Abstand $z_p = 300\text{ mm}$ (b) und (d). Die gemessene Spannung erfolgte für (a) und (b) mit Mikrophon B&K 4138 und für (c) und (d) mit einem Murata mit dem Radius $b = 6.4\text{ mm}$ . . . . .	84
4.4. Überführung der Zeitsignale in den Frequenzbereich mit der FFT und anschließender Umrechnung in den Schalldruckpegel. Die Sender und Empfänger sind für diesen Frequenzverlauf $150\text{ mm}$ voneinander entfernt. Als Sender wurde der Murata MA40B8S (a) und der SensComp600 (b) verwendet. . . . .	85



4.5. Simulation und spektrale Frequenzanteile von der Messung für die Frequenzen $f = 40$ kHz und $f = 80$ kHz. Das Spektrum wurde mittels einer FFT aus den zeitlichen Signalverläufen der Messungen erstellt. . . . .	86
4.6. Validierung des Modells für koaxiale Sender und Empfänger Konfigurationen. Die Simulation und die Messung für den Ultraschallwandler Murata MA40B8S (a) und für den SensComp600 (b). . . . .	88
4.7. Modell zur Schallfeldsimulation von beliebigen Sender und Empfänger Konfigurationen [15]. Der Sender befindet sich in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand und der Mittelpunkt befindet sich im Koordinatenursprung. Der Empfängermittelpunkt ist um einen beliebigen Punkt verschoben und befindet sich im Koordinatenursprung des neuen Systems ( $x', y', z'$ ). Die Orientierung erfolgt über die Drehungen $\Phi_1$ und $\Phi_2$ . . . . .	90
4.8. Anordnung der Sender und Empfänger Konfiguration im Fernfeld. Die Empfänger sind parallel (grüne Linie) und zu dem Sender zugewandt (rote Linie) angeordnet. Die Empfänger werden entlang eines Halbkreises im Abstand von 1 m positioniert und entsprechend der Lage orientiert [15]. . . . .	92
4.9. Simulierte Empfangscharakteristik für einen Ultraschallwandler mit einem Radius $a = 6,4$ mm und einer erregenden Frequenz $f = 40$ kHz. Die Apertur des Empfängers mit dem Radius $b$ ist parallel zur unendlich ausgedehnten Ebene und dem sich darin befindenden Sender ausgerichtet und wird auf einem Halbkreis in 1 m um den Sender bewegt. Der Radius $b = 0$ mm entspricht der analytischen Lösung für das Fernfeld gemäß der Gleichung (2.45). . . . .	93
4.10. Simulierte Empfangscharakteristik für einen Ultraschallwandler mit einem Radius $a = 6,4$ mm und einer erregenden Frequenz $f = 40$ kHz. Die Apertur des Empfängers mit dem Radius $b$ ist zum Sender ausgerichtet und wird auf einem Halbkreis in 1 m um den Sender bewegt. Der Radius $b = 0$ mm entspricht der analytischen Lösung für das Fernfeld gemäß der Gleichung (2.45). . . . .	94
4.11. Schallfeldcharakterisierung von dem Ultraschallwandler MA40B8S (a,b) und dem SensComp600 (c,d). Beide Ultraschallwandler werden bei einer Frequenz $f = 40$ kHz und einer Wechselspannung $V_{pp} = 20$ V betrieben. Der SensComp600 wird zusätzlich mit einer Gleichspannung von 200 V versorgt. Die Schallfelder wurden entsprechend ihrer Geometrie simuliert (a,c) und messtechnisch charakterisiert (b,d). . . . .	96
5.1. Prototyp des Gruppenwandlers [18] mit 8x8 Ultraschallwandlern des Typs MA40S4S. Die geometrische Reduzierung der akustischen Aperturen wurde mithilfe eines dreidimensionalen Druckverfahrens umgesetzt. Die Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler wird über eine elektronische Schaltung realisiert. . . . .	101
5.2. Modellaufbau eines Ultraschall Gruppenwandlers mit einer beliebigen Anzahl von kreisförmigen Aperturen. Diese akustischen Öffnungen befinden sich in einer schallharten Wand und haben einen Elementabstand der halben Wellenlänge. Der Empfänger wird mit einer kreisförmigen Apertur modelliert, sodass der Schalldruck über diese gemittelt wird und somit zur Validierung mit den Messergebnissen verwendet werden kann. . . . .	102
5.3. Qualität des Gitters für den Gruppenwandler mit 8x8 kreisförmigen Aperturen mit einer umgebenen schallharten Wand mit dem Radius $a_{wand} = 125$ mm. Die Qualität wird entsprechend der Gleichung (3.14) auf das Verhältnis der Radien der triangulierten Elemente bezogen (Kapitel 3.4.2). . . . .	103
5.4. Schallwellenausbreitung eines Gruppenwandlers mit 8x8 Elementen in einer schallharten Wand ( $a_{wand} = 125$ mm). Die Aperturen besitzen die Radien $a = 1,7$ mm und den Elementabstand 4,3 mm. Die Abbildungen zeigen den Schalldruckpegel für das BEM Modell in Mathematica (a), das COMSOL Modell (b) und die Differenz der beiden Modelle (c). .	106

5.5. Berechnete Frequenzspektren mithilfe der FFT von den gemessenen zeitlichen Signalen. Die Messungen wurden in einem Abstand zwischen dem Gruppenwandler und dem Mikrophon von $z_p = 150$ mm (a) und $z_p = 300$ mm (b) durchgeführt. Die Erregung der Ultraschallwandler erfolgte mit einer Frequenz $f = 40$ kHz und verschiedenen Wechselspannungen $V_{pp}$ . . . . .	108
5.6. Simulation (a,c) und Messung (b,d) des Schalldrucks von dem Ultraschall Gruppenwandler mit 8x8 akustischen Aperturen in der xz-Ebene. Hierbei erfolgt die Anregung der Ultraschallwandler mit einer Wechselspannung $V_{pp} = 5$ V und die Phasenlage zur Ausrichtung der Hauptkeule entspricht zum einen $\varphi_s = 0^\circ$ und $\vartheta_s = 0^\circ$ (a,b), sowie $\varphi_s = 0^\circ$ und $\vartheta_s = 30^\circ$ (c,d). . . . .	110
5.7. Schallfeld auf einer Kugeloberfläche mit einem Abstand von einem Meter zum Mittelpunkt der Ultraschall Wandlergruppe. Das Ausrichten der Hauptkeule erfolgt bei $\varphi = 0^\circ$ und $\vartheta = 0^\circ$ (Abbildungen a und b), $\varphi = 0^\circ$ und $\vartheta = 30^\circ$ (Abbildungen c und d) und $\varphi = 45^\circ$ und $\vartheta = 60^\circ$ (Abbildungen e und f). Die Abbildungen a, c und e zeigen die simulierten Ergebnisse und die Abbildungen b, d und f die gemessenen Schalldruckpegel. . . . .	112
A.1. Maximaler absoluter Fehler der Schallfeldsimulation im Fernfeld für einen kreisförmigen Kolbenstrahler mit dem Radius $a = 6,4$ mm in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Der Kolbenstrahler wurde mit zehn Zyklen der Frequenz $f = 40$ kHz angeregt. . . . .	117
A.2. Durchschnittlicher absoluter Fehler der Schallfeldsimulation im Fernfeld für einen kreisförmigen Kolbenstrahler mit dem Radius $a = 6,4$ mm in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Der Kolbenstrahler wurde mit zehn Zyklen der Frequenz $f = 40$ kHz angeregt. . . . .	117
B.1. Schallwellenausbreitung entlang der z-Achse eines kreisförmigen Ultraschallwandlers mit einem Radius $a = 12,8$ mm für die Erregungsfrequenzen $f = 40$ kHz (a) und $f = 80$ kHz (b). Die Empfänger haben einen Radius von $b = 1,5$ mm, $b = 3,0$ mm und $b = 6,4$ mm und sind zum Sender koaxial ausgerichtet. Der Radius $b = 0$ mm entspricht der analytischen Lösung eines punktförmigen Empfängers. . . . .	118
C.1. Gemessene Temperatur der umgebenen Luft während der Schallfeldmessungen für die koaxialen Anordnungen von dem Sender und Empfänger (Kapitel 4.4). . . . .	119
C.2. Gemessener stationärer Druck der umgebenen Luft während der Schallfeldmessungen für die koaxialen Anordnungen von dem Sender und Empfänger (Kapitel 4.4). . . . .	119
C.3. Gemessene relative Luftfeuchtigkeit der umgebenen Luft während der Schallfeldmessungen für die koaxialen Anordnungen von dem Sender und Empfänger (Kapitel 4.4). . . . .	120
C.4. Messung des zeitlichen Signalverlaufs von dem schallaussendenden Murata MA40B8S in einem Abstand von $z_p = 150$ mm (a) und (c) und einem Abstand $z_p = 300$ mm (b) und (d). Die gemessene Spannung erfolgte für (a) und (b) mit Mikrophon B&K 4138 und für (c) und (d) mit einem Murata MA40B8R mit dem Radius $b = 6.4$ mm. . . . .	121
C.5. Überführung der Zeitsignale in den Frequenzbereich mit der FFT und anschließender Umrechnung in den Schalldruckpegel. Die Sender und Empfänger sind für diesen Frequenzverlauf 300 mm voneinander entfernt. Als Sender wurde der Murata MA40B8S (a) und der SensComp600 (b) verwendet. . . . .	122
C.6. Gemessener Spannungsverlauf für eine koaxial ausgerichtete Sender und Empfänger Konfiguration. Der Ultraschallwandler MA40B8S wurde mit einer Wechselspannung mit der Amplitude $V_{pp} = 20$ V und der Frequenz $f = 40$ kHz betrieben. Die Messung des Schallsignals wurde mit dem Ultraschallwandler MA40B8R in den Entfernungen 20 mm (a), 30 mm (b), 50 mm (c) und 56 mm (d) zum Sender durchgeführt. . . . .	123

---

## Tabellenverzeichnis

---

2.1. Berechnung der Relaxationsfrequenzen für den Stickstoff und den Sauerstoff in Abhängigkeit der relativen Luftfeuchtigkeit. . . . .	25
3.1. Rechenzeiten zur numerischen Integration eines dreidimensionalen Schallfeldes in der Ebene für 40401 Feldpunkte. Die Quelle ist ein kreisförmiger Kolbenstrahler mit dem Radius $a$ und der erregenden Frequenz $f$ . . . . .	47
3.2. Parameter zur numerischen Integration mit der Gauß'schen Quadratur für Dreiecke [63, 64] . . . . .	54
5.1. Gemessener maximaler Schalldruckpegel bei der harmonischen Frequenz und den ersten zwei Oberwellen. Diese Schalldruckpegel wurden aus dem Frequenzspektrum ermittelt. Dabei wurden zwei Spektren verwendet, die mithilfe der FFT aus den gemessenen Zeitsignalen in einer Entfernung von 150 mm und 300 mm berechnet wurden. . . . .	109

---

## Liste der verwendeten Symbole

---

Symbol	Einheit	Beschreibung
$a$	m	Radius des Senders
$a_{\text{wand}}$	m	Radius der umgebenen schallharten Wand
$A_{\chi,\nu}$	$\text{m s}^{-1}$	Amplitude der Schallschnelle für das Element $\chi, \nu$
$b$	m	Radius des Empfängers
$c_0$	$\text{m s}^{-1}$	Schallausbreitungsgeschwindigkeit
$c_p$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$c_v$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$d_{\text{PML}}$	m	Dicke der angepassten Grenzschrift (PML)
$f$	Hz	Frequenz
$f_{\text{N}_2}$	Hz	Relaxationsfrequenz des Stickstoffs
$f_{\text{O}_2}$	Hz	Relaxationsfrequenz des Sauerstoffs
$f_s$	Hz	Abtastfrequenz
$\vec{f}$	$\text{N m}^{-3}$	Kraftdichte
$g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$	-	Green'sche Funktion
$h_{\text{wand}}$	m	Höhe der umgebenen schallharten Wand
$j$	-	Imaginäre Einheit
$He$	-	Helmholtz Zahl
$k$	$\text{m}^{-1}$	Wellenzahl
$L_{\text{ch}}$	m	Charakteristische Länge
$L_p$	dB	Schalldruckpegel
$Ma$	-	Mach-Zahl
$p$	Pa	Schallwechseldruck
$\bar{p}$	Pa	Gemittelter Schallwechseldruck auf dem Empfänger
$p_0$	Pa	Stationärer Druck
$p_g$	Pa	Gesamter Druck
$p_{\text{ober}}$	Pa	Druck auf der Kolbenoberfläche
$p_{\text{ref}}$	Pa	Referenzierter Druck
$q_{\text{drei}}$	-	Qualität eines Dreiecks
$q_{\text{gitter}}$	-	Qualität des Gitters zur Annäherung an die Geometrie
$R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$	m	Euklidischer Abstand
$R_s$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Spezifische Gaskonstante
$r_{\text{Luft}}$	m	Simulationsgebiet der umgebenen Luft
$\vec{r}_p$	m	Aufpunktvektor
$\vec{r}_q$	m	Quellvektor
$T$	K	Temperatur
$T_{\text{ch}}$	s	Charakteristische Zeit
$t$	s	Zeit
$t_r$	s	Rechenzeit
$\vec{v}$	$\text{m s}^{-1}$	Schallschnelle
$\vec{v}_0$	$\text{m s}^{-1}$	Stationäre Strömung
$v_{\text{ch}}$	$\text{m s}^{-1}$	Charakteristische Geschwindigkeit
$\vec{v}_g$	$\text{m s}^{-1}$	Zusammengesetzte Geschwindigkeit
$\vec{v}_n$	$\text{m s}^{-1}$	Schallschnelle in Normalenrichtung

---

$V_{pp}$	V	Wechselspannung (Spitze-Spitze)
$w_n$	-	Wichtungsfaktor
$x_n$	-	Stützstelle
$x_p, y_p, z_p$	m	Kartesische Koordinaten des Aufpunktes
$x_q, y_q, z_q$	m	Kartesische Koordinaten des Quellvektors
$z_f$	m	Nahfeldlänge
$z_s$	$N s m^{-3}$	Spezifische akustische Impedanz
$\alpha$	$dB m^{-1}$	Absorptionskoeffizient
$\alpha_{th,v}$	$dB m^{-1}$	Klassische Absorption
$\alpha_{N_2}$	$dB m^{-1}$	Absorption durch die Relaxation des Stickstoffs
$\alpha_{O_2}$	$dB m^{-1}$	Absorption durch die Relaxation des Sauerstoffs
$\Delta F_n$	$m^2$	Flächenelement
$\varepsilon_z$	%	Fehler auf der z Achse
$\varepsilon_\theta$	%	Fehler im Fernfeld
$\kappa$	-	Isentropenkoeffizient
$\lambda$	m	Wellenlänge
$\Phi_1$	°	Drehwinkel um die y-Achse
$\Phi_2$	°	Drehwinkel um die z-Achse
$\varphi_s$	°	Azimutalwinkel zur Ansteuerung des Gruppenwandlers
$\varphi_{\chi,v}$	rad	Phasenverschiebung für das Element $\chi, v$
$\psi$	$m^2 s^{-1}$	Geschwindigkeitspotential
$\rho$	$kg m^{-3}$	Schallwechseldichte
$\rho_0$	$kg m^{-3}$	Stationäre Dichte des Mediums
$\rho_{ch}$	$kg m^{-3}$	Charakteristische Dichte
$\rho_g$	$kg m^{-3}$	Gesamte Dichte
$\vartheta_s$	°	Polarwinkel zur Ansteuerung des Gruppenwandlers
$\vartheta$	°	Öffnungswinkel
$\omega$	Hz	Kreisfrequenz

---

## Akronyme und Abkürzungen

---

BEM	Boundary Element Method
CAS	Computer Algebra System
CUDA	Compute Unified Device Architecture
CPU	Central Processing Unit
FDTD	Finite Difference Time Domain
FEM	Finite Element Method
FFT	Fast Fourier Transform
GP	Gauß Punkte
GPU	Graphics Processing Unit
KHI	Kirchhoff-Helmholtz Integral
PLA	Polylactide
PML	Perfectly Matched Layer
SIR	Spatial Impulse Response

---

## 1 Einleitung

---

Der Ultraschall ist eine physikalische Erscheinung, die häufig in der Technik verschiedener Fachrichtungen angewendet wird. Eines der größten Anwendungsgebiete ist die Medizintechnik, in der sie zum einen zur diagnostischen Bildgebung und zum anderen für therapeutische Maßnahmen [1, 2] verwendet wird. Neben der Medizintechnik wird der Ultraschall auch sehr häufig in den Materialwissenschaften für die zerstörungsfreie Prüfung von Werkstoffen genutzt [3]. Außerdem gewinnt der Ultraschall für luftgekoppelte Anwendungen immer mehr an Bedeutung. Unter anderem wird dieser in der Automobilbranche für Parksensoren verwendet. Auch das autonome Navigieren für mobile Roboter wird mit dem gleichen Verfahren umgesetzt [4]. Darüber hinaus werden Ultraschallwandler auch zur Durchflussmessung von Gas durchströmten Rohren [5] benutzt. Einen besonderen Einfluss auf die aktuellen Forschungsthemen nehmen der Prototypenentwurf von Ultraschall Gruppenwandlern und deren Ansteuerung ein. Hierbei werden Ultraschall Gruppenwandler unter anderem für taktile und haptische Systeme [6], zur gezielten Steuerung eines Luftstroms [7], der Levitation [8] oder eines parametrischen Lautsprechers [9] verwendet. Für diese Vielzahl von Anwendungen werden unterschiedliche physikalische Phänomene genutzt. Für all diese Anwendungen bildet die Schallwellenausbreitung die Grundlage. Diese wird durch die Form der akustischen Apertur und durch die Erregung ausgeprägt. Die charakteristischen Ausprägungen der Schallwellenausbreitung ausgehend von einzelnen Ultraschallwandlern und Gruppenwandlern werden in dieser Arbeit modelliert und simuliert.

---

### 1.1 Motivation und Zielsetzung der Arbeit

---

Durch die Verfügbarkeit kostengünstiger einzelner Ultraschallwandler, den elektronischen Bauteilen zur Ansteuerung und modernen dreidimensionalen Drucktechniken können beliebige Ultraschall Gruppenwandler gefertigt werden. Anhand von Modellen kann vorab das Schallfeld simuliert werden und die Erkenntnisse daraus bei dem Entwurf der Ultraschall Gruppenwandler verwendet werden. Dadurch können konstruktive Fehlplanungen der geometrischen Anordnung vermieden werden. Außerdem können durch schnelle Simulationen Optimierungen des Gruppenwandlers vorgenommen werden, sodass die geforderte Schallausbreitung erreicht werden kann. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein Modell entwickelt, mit dem die charakteristische Schallabstrahlung von Gruppenwandlern simuliert werden kann. Darüber hinaus sollen anhand des Modells die physikalischen Eigenschaften der Wellenausbreitung besser verstanden werden. Hierbei soll neben der Schallausbreitung der Ultraschallwandler auch auf die Randbedingungen der Umgebung eingegangen werden.

Die besonderen Herausforderungen bei der Simulation eines großvolumigen Schallfelds im Ultraschallbereich sind die relativ kurzen Wellenlängen in dem Medium Luft. Durch die Diskretisierung des gesamten Raumes werden mit den gängigen Verfahren der Finiten Elemente Methode (FEM) und der Finiten Zeitdifferenzen Methode (FDTD) die dreidimensionale Raumgröße deutlich reduziert, weil bei großen Volumen die notwendige Knotenanzahl die derzeitigen Rechenleistungen überschreiten [10, 11, 12]. Diese Räume sind häufig so klein, dass keine Aussage mehr über die Schallausbreitung im Volumen getroffen werden kann. Deshalb wird meistens die Dimension der Problemstellung reduziert. Jedoch stellen sowohl rotationssymmetrische, als auch zweidimensionale Modelle eine Vereinfachung der Problemstellung dar und beschränken daher die allgemeingültige Simulation der Schallwellenausbreitung. Außerdem können damit die physikalischen Effekte unter Umständen nicht richtig erkannt und gedeutet werden. Auch die Verwendung der Randelementmethoden, bei denen das Schallfeld über die Oberfläche berechnet wird, eignen sich nur bedingt für die Schallfeldsimulation im Ultraschallbereich. Hierbei ist ebenfalls die notwendige Knotenanzahl problematisch für die Simulation. Das hauptsächliche Problem ist dabei das Lösen des resultierenden Gleichungssystems, welches aufgrund der hohen Knotenanzahl sehr rechenintensiv ist und daher teilweise mit den derzeitigen Computern nicht berechnet werden kann.

---

Aus diesem Grund soll ein Modell entworfen werden, mit dem das Schallfeld in einem relativ großen dreidimensionalen Raum, verglichen zu der Wellenlänge im Ultraschallbereich, simuliert werden kann. Dieses Volumen sollte mindestens eine Größe von  $1 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$  aufweisen. Darüber hinaus sollen mit diesem Modell sämtliche ebene Formen von Ultraschallwandlern und Gruppenwandler möglich sein. Die Ultraschallwandler und Gruppenwandler sollen in ebenen schallharten Wänden montiert werden, damit nur das Schallfeld der Wandler charakterisiert werden und die äußeren Gegebenheiten keinen Einfluss auf das Schallfeld nehmen.

Um die Zuverlässigkeit des Modells zu gewährleisten, soll es mit bekannten Lösungen der Akustik verglichen werden und somit eine Verifizierung der Simulationsergebnisse erfolgen. Hierbei soll auch der Unterschied zu den idealisierten Modellansätzen aufgezeigt werden und dabei erläutert werden, wie das neue Modell die Schallfeldsimulation besser an die Realität annähert und somit das physikalische Verhalten besser widerspiegelt. Abschließend soll das Modell mit Messergebnissen validiert werden. Dabei sollen auf die Messunsicherheiten, die Grenzen des Modells und den weiteren Annahmen bei der Modellierung eingegangen werden.

---

## 1.2 Aufbau der Arbeit

---

Diese Arbeit untergliedert sich neben der Einleitung in fünf Kapitel. Hierbei werden zunächst im zweiten Kapitel die theoretischen Grundlagen der Schallwellenausbreitung für kompressible Medien erläutert. Auf den Grundgleichungen aufbauend wird die lineare Wellengleichung hergeleitet und in ein Randintegral überführt. Anhand der speziellen Positionierung des Ultraschallwandlers in einer unendlich ausgedehnten Wand kann das Randintegral vereinfacht werden. Für dieses Integral werden zwei analytische Lösungen präsentiert, mit denen im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Modelle verifiziert werden können. Abschließend wird eine Abschätzung zu den vereinfachenden Annahmen der linearen Schallwellenausbreitung durchgeführt. Hierbei wird sowohl auf die absorbierende Dämpfung durch das Medium als auch auf den Einfluss der möglichen Nichtlinearitäten im Medium eingegangen. Anhand der nichtlinearen Grundgleichungen der Akustik wird dabei die Untersuchung bezüglich der Nichtlinearitäten durchgeführt.

Im darauf folgenden Kapitel werden Modelle in kommerziellen und kostenfreien Simulationsprogrammen erstellt und mit deren Hilfe das Schallfeld simuliert. Hierbei werden unterschiedliche numerische Verfahren der akustischen Wellenausbreitung angewendet. Die berechneten Simulationsergebnisse werden mit den analytischen Lösungen verifiziert. Anschließend erfolgt die Berechnung des Schallfeldes mit numerischen Integrationstechniken, welche ebenfalls verifiziert werden. Aufgrund der sehr guten Parallelisierbarkeit der Problemstellung wird die Simulation mithilfe einer Grafikkarte durchgeführt. Dazu wird ein selbst entwickeltes Programm, welches auf der Grafikkarte abläuft, verwendet. Durch die zeitliche Ersparnis können hochaufgelöste dreidimensionale Schallfelder simuliert werden. Die bis dahin durchgeführten Simulationen basieren auf den idealisierten Modellen der Schallausbreitung, welche auf der Annahme beruhen, dass sich der Ultraschallwandler in einer unendlich ausgedehnten schallharten Ebene befindet. Daher wird ein neues Modell entwickelt, welches den physikalischen Gesetzmäßigkeiten besser entspricht. Dieses wird durch das Einführen der fest vorgegebenen Abmessung der umgebenen schallharten Wand um den Ultraschallwandler erreicht, wodurch weitere Randbedingungen für die Simulation definiert werden. Hierbei können keine analytischen Lösungen zur Verifikation verwendet werden. Jedoch wird mit einem kommerziellen Programm ein Vergleich durchgeführt. Die grundsätzlichen Modellansätze werden gegenübergestellt und die Grenzen der jeweiligen Modelle erläutert. Abschließend erfolgt eine Einschätzung für welche Problemstellung sich die vorgestellten Methoden am besten eignen.

Im vierten Kapitel wird das Schallfeld von einzelnen Ultraschallwandlern simuliert und messtechnisch charakterisiert. Mit den aufgenommenen Messergebnissen werden anschließend die erstellten Modelle validiert. Jedoch zeigt sich dabei, dass die bisherigen Modelle das Schallfeld jeweils nur in einem Feldpunkt abbilden. Das bei der Messung verwendete Mikrophon besitzt jedoch eine Empfangsapertur,



---

sodass eine Anpassung des Modells an diese Gegebenheit durchgeführt wird. Darüber hinaus wird der Einfluss des flächenbehafteten Empfängers untersucht und es wird ein Vergleich zu dem ursprünglichen Modell gezogen. Abschließend werden die Simulationsergebnisse des Modells mit den Messergebnissen verglichen und es werden die Unterschiede zwischen diesen erläutert.

Darauf aufbauend werden die bisherigen Erkenntnisse zur Modellierung eines Ultraschall Gruppenwandlers verwendet. Hierbei kann das bisherige Modell in den Grundzügen verwendet werden, jedoch bedarf es einer Änderung durch die Vielzahl der einzelnen Schall aussendenden Aperturen. Neben der Integration dieser akustischen Aperturen, werden diese auch mit einer individuellen Amplituden- und Phasensteuerung vorgesehen, sodass eine Ausrichtung und Fokussierung des Schallfeldes möglich ist. Mithilfe der Schallfeldvermessung von einem gefertigten Prototypen als Ultraschall Gruppenwandler wird das Modell validiert. Dabei werden unterschiedliche Phasensteuerungen verwendet, sodass die Schallausbreitung in eine vorgegebene Richtung erfolgen kann. Die Messergebnisse der charakteristischen Schallausbreitung werden mit dem simulierten Feld verglichen und es werden die Unterschiede erläutert.

Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse aus der Modellierung und der Messung kurz zusammengefasst. Aus den gewonnenen Erkenntnissen werden Schlussfolgerungen der physikalischen Eigenschaften und der Modellierungen gezogen. Dabei wird erläutert, unter welchen Gegebenheiten das entwickelte Modell verwendet werden kann und wo die Grenzen mit diesem liegen. Abschließend wird ein Ausblick für weitere Arbeiten gegeben.

---

### 1.3 Wissenschaftliche Themenschwerpunkte

---

Der Autor dieser Arbeit ist der Ansicht, dass die folgenden Themenschwerpunkte von ihm selbstständig durchgeführt wurden.

#### 1. Modellbildung und Schallfeldsimulation mit kommerzieller und frei erhältlicher Software.

Es wurden für die Schallfeldsimulation das Programm COMSOL Multiphysics und das Programm Field II für MATLAB verwendet. Mit den Methoden der finiten Elemente (Kapitel 3.2.1) und der Randelemente (Kapitel 3.5.2 und 5.3) wurden von mir verschiedene Modelle in COMSOL, sowohl für die einzelnen Ultraschallwandler als auch für die Gruppenwandler entworfen. Ebenso wurde ein Modell für die räumliche Impulsantwort in Field II (Kapitel 3.2.2) zur Schallfeldsimulation eines kreisförmigen Ultraschallwandlers entwickelt. Mit den bekannten Lösungen wurden die simulierten Ergebnisse verglichen und die Resultate bewertet. Darüber hinaus wurde festgestellt, dass sich die Methoden, die den gesamten dreidimensionalen Raum diskretisieren, nicht für die Schallfeldsimulation eignen.

#### 2. Schallfeldsimulationen von Ultraschallwandlern unter idealen Randbedingungen.

Anhand des Rayleigh Integrals, welches eine direkte Integration zulässt, wurden von mir numerische Integrationstechniken in Mathematica angewendet und deren Ergebnisse ausgewertet. Die vorhandenen Integrationstechniken ermöglichen zwar eine genaue Berechnung, verglichen mit den analytischen Lösungen, jedoch ist deren Rechenaufwand groß. Durch eine angewendete Diskretisierung des Integrals und einer anschließenden Triangulierung der Geometrie [13], wurde von mir die numerische Integration auf der Grundlage der Gauß'schen Quadratur in sequentiellen und parallelen Code programmiert. Aufgrund der guten Parallelisierbarkeit des Modells, konnte die Schallfeldsimulation mithilfe einer Grafikkarte durchgeführt werden. Durch die signifikante Zeitreduzierung ergeben sich für die Simulation von dreidimensionalen Schallfeldern neue Analysemöglichkeiten. Deshalb ist es für zukünftige Simulationen möglich, die physikalischen Phänomene genauer abzubilden und zuverlässigere Aussagen darüber zu treffen.

---

### 3. Schallfeldsimulationen von Ultraschallwandlern unter realen Randbedingungen.

Die meisten Programme gehen bei der Modellierung der Schallausbreitung von idealisierten Bedingungen aus und vereinfachen unter der Annahme einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand somit die vorliegenden Randbedingungen. Dieses stellt jedoch eine deutliche Vereinfachung dar, weil die in der Realität gefertigten Umgebungen um die Ultraschallwandler eine feste Ausdehnung besitzen. Aus diesem Grund habe ich ein Modell entwickelt, in dem die exakten geometrischen Abmessungen der umgebenen schallharten Wand berücksichtigt sind. Dieses Modell wurde von mir in Mathematica in einem parallelen Programmcode implementiert. Auf der Grundlage weiterer erstellter Modelle in COMSOL, welche ebenfalls diese Randbedingungen erfüllen, wurde eine Validierung der Simulationsergebnisse durchgeführt. Abschließend habe ich die grundsätzlichen Modellansätze der idealisierten und realen Randbedingungen gegenübergestellt und deren Unterschiede aufgezeigt. Dabei kann mein Modell im Gegensatz zu den idealisierten Schallfeldsimulationen das physikalische Verhalten in einem größeren Gebiet genauer abbilden.

### 4. Modellierung und Simulation von beliebigen Sender und Empfänger Konfigurationen.

In vorherigen Arbeiten [14] konnte gezeigt werden, dass bei koaxialen Sender und Empfänger Anordnungen auch die Empfangsfläche einen Einfluss auf den Schalldruckverlauf hat. Daher wurde von mir die zuvor entwickelten Modelle erweitert, sodass der Schalldruck nicht in einem einzelnen Feldpunkt sondern über die Fläche des Empfängers berechnet wird. Dabei wurde der Ansatz [14] verwendet und auf beliebige Positionierungen und Orientierungen der Sender und Empfänger zueinander in dem Modell implementiert [15]. Dadurch wird bei den Simulationen auch die Empfangsapertur des Mikrophons oder anderer Ultraschallwandler berücksichtigt. Mithilfe dieses angepassten Modells kann das Schallfeld realitätsnah für die Schallfeldcharakterisierung von Ultraschallwandlern simuliert werden und ermöglicht auch die Simulation für pitch-catch Messungen. Anhand eines bestehenden Messaufbaus wurden von mir Experimente durchgeführt, mit denen ich das Schallfeld der Ultraschallwandler vermessen und charakterisiert habe. Mit diesen Messergebnissen konnte das Modell validiert werden und kann somit für zukünftige Schallfeldsimulationen verwendet werden.

### 5. Simulation und Charakterisierung der Schallwellenausbreitung von Ultraschall Gruppenwandlern.

Zur Schallfeldsimulation eines Ultraschall Gruppenwandler habe ich zunächst ein neues Modell mit idealisierten Randbedingungen entwickelt [16]. Hierbei wurde es für einen eindimensionalen Gruppenwandler in rechteckiger Ausdehnung [17] und auch für einen zweidimensionalen Gruppenwandler [18] entworfen. Abschließend wurde noch eine Änderung des Modells durchgeführt, sodass bei diesem auch die geometrische Ausdehnung der umgebenen schallharten Wand berücksichtigt wird. Dieses Modell entspricht dabei besser den realen Gegebenheiten und bildet die physikalischen Phänomene genauer ab. Das Modell wurde von mir mit Messungen validiert und es konnte gezeigt werden, dass die Simulationsergebnisse die erwarteten physikalischen Eigenschaften entsprechen.

---

Die während dieser Arbeit entwickelten Modelle wurden in den folgenden Konferenzbeiträgen veröffentlicht:

1. René Golinske, Maik Hoffmann, Abhinav Gupta und Mario Kupnik, „Calculation of diffraction loss between non-co-axial ultrasonic transducer configurations“, 2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), 2013
2. René Golinske, Maik Hoffmann, Eric Konetzke, Alexander Unger, Matthias Rutsch und Mario Kupnik, „Diffraction loss calculation based on boundary element method for an air-coupled phased array“, 2015 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), 2015
3. Eric Konetzke, Matthias Rutsch, Maik Hoffmann, Alexander Unger, René Golinske, Dirk Killat, Sivaram Nishal Ramadas, Steve Dixon und Mario Kupnik, „Phased array transducer for emitting 40-kHz air-coupled ultrasound without grating lobes“, 2015 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), 2015
4. Axel Jäger, Dominik Großkurth, Matthias Rutsch, Alexander Unger, René Golinske, Han Wang, Steve Dixon, Klaus Hofmann und Mario Kupnik, „Air-coupled 40-KHZ ultrasonic 2D-phased array based on a 3D-printed waveguide structure“, 2017 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), 2017

In dieser Arbeit wurden die folgenden Programme und Bibliotheken verwendet:

- Mathematica der Version 10.0 [19] und der Version 11.0 [20];
- MATLAB der Version 9.1 [21];
- COMSOL Multiphysics® der Version 5.2a [22] und 5.3a [23];
- Field II [24, 25];
- DistMesh [13]

---

## 2 Schallwellenausbreitung in Fluiden

---

Das folgende Kapitel wird zur theoretischen Einführung in die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Schallausbreitung in Fluiden herangezogen. Hierbei werden die Grundlagen für die spätere Modellierung und Simulation der Schallausbreitung von Ultraschallwandlern und Gruppenwandlern gelegt. Aufbauend auf den Grundgleichungen der Akustik wird die lineare Wellengleichung hergeleitet und diese mithilfe des zweiten Green'schen Satzes gelöst. Anhand des hergeleiteten Kirchhoff-Helmholtz Integrals (KHI) ist es möglich, die Schallabstrahlung mit der Vorgabe von Dirichlet oder Neumann Randbedingungen zu berechnen. Diese Randbedingungen entsprechen dem Schalldruck und der Schallschnelle, welche auf der umschließenden Oberfläche des Volumens festgelegt werden. Eine spezielle Form des KHI stellt das Rayleigh Integral dar, bei dem die Schallabstrahlung nur noch in einen Halbraum erfolgt. Mithilfe dieses Integrals werden zwei analytische Lösungen vorgestellt, mit denen die Simulationsergebnisse verifiziert werden. Abschließend wird noch eine Abschätzung bezüglich der getroffenen Annahmen und den daraus resultierenden Vereinfachungen gemacht. Dabei werden sowohl die Dämpfung durch das Medium als auch die auftretenden Nichtlinearitäten in der Wellenausbreitung anhand der allgemeingültigen nichtlinearen Gleichungen der Akustik untersucht und deren Einfluss auf die Schallausbreitung bewertet.

---

### 2.1 Akustische Grundgleichungen

---

In der Akustik wird das Fluid durch die drei physikalischen Größen Druck, Dichte und Geschwindigkeit charakterisiert. Dabei setzen sich diese Größen durch einen statischen Anteil und einem Wechselanteil zusammen. Der statische Anteil entspricht der Ruhegröße von dem Fluid und der Wechselanteil entsteht durch eine Störung des Systems. Diese zusammengesetzten Größen werden durch die Gleichungen

$$p_g = p_0 + p \quad (2.1a)$$

$$\rho_g = \rho_0 + \rho \quad (2.1b)$$

$$\vec{v}_g = \vec{v}_0 + \vec{v} \quad (2.1c)$$

dargestellt [26, 27]. Hierbei entspricht  $p$  dem Druck,  $\rho$  der Dichte und  $\vec{v}$  der Geschwindigkeit. Diese physikalischen Größen haben die Einheit für den Druck Pa, der Dichte  $\text{kg m}^{-3}$  und der Geschwindigkeit  $\text{m s}^{-1}$ . Die Indizes der Feldgrößen entsprechen für g der zusammengesetzten Größe und 0 für den Gleichanteil. Die veränderlichen Schallfeldgrößen werden ohne Index dargestellt. Des Weiteren haben sich in der Akustik für die veränderlichen Größen die Bezeichnung Schallwechseldruck für  $p$ , Schallwechseldichte für  $\rho$  und Schallschnelle für  $\vec{v}$  etabliert [3].

Die akustischen Grundgleichungen beruhen auf den durch Euler beschriebenen Gleichungen der Massenerhaltung beziehungsweise der Kontinuitätsgleichung und der Impulserhaltung [28]. Diese beiden Grundgleichungen beinhalten in der ursprünglichen Form keine zusätzlichen Kraftterme, sodass unter anderem keine Viskosität oder Gravitationskräfte in den Gleichungen berücksichtigt werden. Neben diesen zwei Gleichungen wird noch die isentrope Zustandsgleichung idealer Gase verwendet. Es wird davon ausgegangen, dass die Zustandsänderungen adiabatisch ablaufen und es somit zu keinem Wärmeaustausch mit der Umgebung kommt. Im Folgenden werden diese Gleichungen detailliert erläutert.

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche Massenänderung innerhalb eines festen Volumens durch den Massenstrom, der in Summe durch die Oberfläche des Volumens tritt [29]. Hierbei wird

jedoch nicht die Masse an sich betrachtet, sondern vielmehr wie sich die Dichte zeitlich innerhalb des Volumens ändert. Aufgrund des fest vorgegebenen Volumens können die Masse und die Dichte beliebig ineinander ausgetauscht werden. Dasselbe gilt auch für den Massenstrom, der das Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit bildet. Über den Gauß'schen Satz, lässt sich der eintretende Massenstrom über die Oberfläche in ein Volumenintegral überführen. Dadurch ist es möglich, die Gesetzmäßigkeit zwischen der sich zeitlich ändernden Dichte und dem Massenstrom in einer differentiellen Form zu beschreiben. Dieser physikalische Zusammenhang lässt sich durch die folgende Formel

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \vec{v}_g) = 0 \quad (2.2)$$

darstellen [28]. Bei dieser partiellen Differentialgleichung existiert eine Nichtlinearität, welche im zweiten Term der Gleichung auftritt. Dieser Term beinhaltet zwei lineare Anteile, bei denen entweder die Geschwindigkeit oder die Dichte des Fluids konstant und eine Größe veränderlich ist. Hinzu kommt ein nichtlinearer Anteil, bei dem beide veränderlichen Größen vorkommen. Der vierte Anteil verschwindet, da die statischen Feldgrößen der Dichte und der Geschwindigkeit räumlich konstant sind und somit deren Ableitungen zu null werden.

Die zweite Euler'sche Gleichung basiert auf dem zweiten Newton'schen Gesetz, welches den Impulssatz beschreibt. Mittels einer Bilanzgleichung des Impulses wird die zweite Euler'sche Gleichung beschrieben [29]. Dabei entspricht die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb eines fest vorgegebenen Volumens den zuströmenden Impulsen, die durch das Fluid transportiert werden und den auf dieses Volumen wirkenden Kräften. Diese Kräfte sind zum einen durch den wirkenden Druck auf der Oberfläche des Volumens und zum anderen durch Volumenkräfte, wie der Gravitationskraft, gekennzeichnet. Anhand des Gauß'schen Satzes können die über die Oberfläche zuströmenden Impulse und wirkenden Kräfte in ein Volumenintegral überführt werden. Durch die Wahl eines beliebigen Volumens müssen die Integranden einander entsprechen und aus diesem Grund muss

$$\rho_g \frac{D\vec{v}_g}{Dt} + \nabla p_g = \vec{f} \quad (2.3)$$

gelten [28]. Bei dieser Darstellung wurde bereits die substantielle Ableitung verwendet, die die zeitliche Änderung und den Zustrom der Impulse beinhaltet. Auf der rechten Seite wird die Kraftdichte  $\vec{f}$  angegeben. Diese beinhaltet sämtliche auf das Medium wirkende Kräfte mit Ausnahme des Druckes, der in der Normalenrichtung auf der Oberfläche des Volumens wirkt.

Neben den beschriebenen Euler'schen Gleichungen wird noch die Zustandsgleichung von den Gasen benötigt. Hierbei wird angenommen, dass die Luft zum einen adiabatisch ist, wodurch es zu keiner Wärmeübertragung kommt und zum anderen soll sich das Medium nicht viskos verhalten. Durch diese zwei Annahmen kann die isentropische Zustandsgleichung für ideale Gase der Form

$$\frac{p_g}{p_0} = \left( \frac{\rho_g}{\rho_0} \right)^\kappa \quad (2.4)$$

verwendet werden [27, 29]. Hierbei ist  $\kappa$  gerade der Isentropenkoeffizient, welcher das Verhältnis zwischen den Wärmekapazitäten bei konstantem Druck  $C_p$  und konstantem Volumen  $C_v$  bildet. Dieser Koeffizient ist von dem Material, der Temperatur und dem stationären Druck abhängig. Aufgrund der zu untersuchenden Schallausbreitung in dem Medium wird davon ausgegangen, dass sich die Luft unter einem Normaldruck von  $p_0 = 1 \text{ atm}$  und einer Umgebungstemperatur von  $20^\circ \text{C}$  befindet [30]. Die Luft setzt sich aus ca. 78% Stickstoff und 21% Sauerstoff zusammen. Den übrigen Anteil bilden unter anderem Edelgase oder Kohlenstoffdioxid [31]. Aus diesem Grund setzt sich die Luft hauptsächlich aus zweiatomigen Molekülen zusammen und dadurch wird für das ideale Gas mit dieser Molekülstruktur  $\kappa = 1,4$  verwendet [32].

Die isentrope Zustandsgleichung wird in eine Taylorreihe [29] entwickelt. Daher folgt aus der Zustandsgleichung

$$\frac{p_g}{p_0} \approx 1 + \kappa \frac{(\rho_g - \rho_0)}{\rho_0} + \frac{\kappa(\kappa-1)}{2!} \frac{(\rho_g - \rho_0)^2}{\rho_0^2} + \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{3!} \frac{(\rho_g - \rho_0)^3}{\rho_0^3} + \dots \quad (2.5)$$

Welche vereinfacht werden kann zu

$$p \approx \kappa p_0 \frac{\rho}{\rho_0} \left( 1 + \frac{(\kappa-1)}{2!} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{(\kappa-1)(\kappa-2)}{3!} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + \dots \right). \quad (2.6)$$

In dieser Gleichung, wie in der vorigen auch, ist die Nichtlinearität der ursprünglichen Zustandsgleichung ersichtlich. Dabei ist der Anteil der nichtlinearen Terme, im Verhältnis zu dem linearen Term, abhängig von den Schwankungen der Dichte. Wenn diese sehr klein gegenüber der statischen Dichte des Mediums sind, werden die quadratischen und höheren Terme sehr viel kleiner als der lineare Anteil. Deshalb können bei kleinen Schwankungen der Dichte, im Verhältnis zur stationären Dichte, höhere Terme in der Gleichung (2.6) und somit die Nichtlinearitäten vernachlässigt werden. Von besonderer Bedeutung ist der erste Faktor, welcher durch die Gleichung

$$c_0 = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} \quad (2.7)$$

beschrieben werden kann [32]. Anhand dieser Gleichung kann die Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0$  mit der Einheit  $\text{ms}^{-1}$  berechnet werden. Diese charakteristische physikalische Größe gibt an, wie schnell eine Welle in einem Medium propagiert. Alternativ kann die Berechnung der Schallausbreitungsgeschwindigkeit auch über die perfekte Gasgleichung erfolgen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit kann dann mit

$$c_0 = \sqrt{\kappa R_s T} \quad (2.8)$$

berechnet werden. In dieser Gleichung ist  $R_s$  die spezifische Gaskonstante und  $T$  die Temperatur. Hierbei hat die spezifische Gaskonstante die Einheit  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$  und die Temperatur die Einheit K. Die Gaskonstante ist stoffabhängig und muss entweder experimentell oder durch spezielle theoretische Analysen ermittelt werden. Für trockene Luft, welche bei geringer relativer Feuchte vorliegt, beträgt die spezifische Gaskonstante  $R_s \approx 287,1 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$  [27]. Demzufolge ergibt sich, unter dem Normalzustand des Mediums Luft, eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $c_0 = 343,3 \text{ ms}^{-1}$ , welche für die weiteren Berechnungen verwendet wird.

## 2.2 Lineare Wellengleichung

Im vorherigen Abschnitt wurden die akustischen Grundgleichungen dargestellt und diese sollen nun für die Herleitung der linearen Wellengleichung verwendet werden. Grundsätzlich gelten die nichtlinearen Gleichungen (2.2, 2.3, 2.4) immer. Jedoch sind diese rechentechnisch, insbesondere wenn große dreidimensionale Räume betrachtet werden, schwieriger und aufwendiger zu lösen. Bei Hochleistungs-ultraschallanwendungen, wie beispielsweise dem Reinigen mit Ultraschall, Ultraschallschweißen oder hoch intensivem fokussiertem Ultraschall, müssen aufgrund der großen Amplituden der Schallfeldgrößen die nichtlinearen Grundgleichungen der Akustik verwendet werden [3]. Dennoch sind die meisten herkömmlichen Anwendungen von kleinen Amplituden der Schallfeldgrößen gekennzeichnet, sodass durch eine linearisierte Modellbildung zuverlässige Ergebnisse berechnet werden können, die die physikalischen Gesetzmäßigkeiten korrekt darstellen.

Um die Linearisierung der Gleichungen vornehmen zu können, werden zunächst Annahmen getroffen. Damit werden Bedingungen definiert, mit denen die Vereinfachungen der Gleichungen durchgeführt werden. Dazu werden die Beträge der Schallfeldgrößen gegen die statischen Größen des Feldes abgeschätzt. Diese Abschätzungen werden in den Ungleichungen

$$|\rho| \ll \rho_0 \quad (2.9a)$$

$$|p| \ll \rho_0 c_0^2 \quad (2.9b)$$

$$|\vec{v}| \ll c_0 \quad (2.9c)$$

$$\vec{v}_0 = 0 \quad (2.9d)$$

dargestellt [29]. Eine Einschränkung für das Medium ist hierbei die Gleichung (2.9d), wodurch das Medium in Ruhe beschrieben wird. Daher ist es ersichtlich, dass keine konstante oder räumlich verteilte stationäre Strömung innerhalb des Volumens auftritt. Die übrigen Ungleichungen (2.9a, 2.9b, 2.9c) geben eine Abschätzung der veränderlichen Größen, welche durch die Schallerzeugung hervorgerufen werden, gegenüber den stationären Größen des Feldes. Die betragsmäßige Amplitude der Dichteänderung soll dabei stets sehr viel kleiner als die stationäre Dichte des Mediums gemäß der Ungleichung (2.9a) sein. Darüber hinaus soll auch die Amplitude des Schalldrucks stets sehr viel kleiner als das Produkt aus der Dichte des Mediums und der quadratischen Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend der Ungleichung (2.9b) sein. Auch die Amplitude der Schallschnelle muss immer sehr viel kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach der Ungleichung (2.9c) sein. Nur wenn diese Bedingungen erfüllt sind, kann die Linearisierung der akustischen Gleichungen erfolgen.

Im ersten Schritt werden die Gleichungen (2.1) mit der Annahme  $\vec{v}_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$  in die Massengleichung (2.2) eingesetzt. Daraus resultiert die folgende Gleichung

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho)}{\partial t} + (\rho_0 + \rho)(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla (\rho_0 + \rho)) = 0. \quad (2.10)$$

Aufgrund der räumlichen und zeitlichen konstanten Ruhegrößen des Mediums, werden deren Ableitungen zu null und es folgt daraus die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho_0 + \rho)(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \rho) = 0. \quad (2.11)$$

Im letzten Schritt werden die Terme größenmäßig gegeneinander abgeschätzt und es werden die Terme, die deutlich kleiner gegenüber anderen Termen sind vernachlässigt. Dabei werden die Terme besonders klein, wenn die relativ kleinen physikalischen Größen  $\rho$  und  $\vec{v}$  miteinander multipliziert werden [29]. Demzufolge werden alle Terme, in denen diese Verknüpfung auftritt, nicht weiter berücksichtigt. Daraus erfolgt die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v}) = 0, \quad (2.12)$$

welche die lineare Kontinuitätsgleichung ist. Ähnlich wird auch mit der Bewegungsgleichung (2.3) vorgegangen. Dazu wird zunächst die substantielle Ableitung in die einzelnen Bestandteile aufgeteilt und die zusammengesetzten Größen nach den Gleichungen (2.1), wobei wieder  $\vec{v}_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$  ist, eingesetzt. Es ergibt sich somit

$$(\rho_0 + \rho) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) + \nabla (p_0 + p) = 0. \quad (2.13)$$



In dieser Gleichung fällt zunächst nur der stationäre Druck des Mediums  $p_0$  durch den zu bildenden Gradienten weg. Anschließend erfolgt die Größenabschätzung der Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0 ((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) + \rho ((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) + \nabla p = 0. \quad (2.14)$$

Hierbei werden wieder die Terme vernachlässigt, bei denen mindestens zwei der veränderlichen kleinen physikalischen Größen  $\rho$  oder  $\vec{v}$  vorkommen. Durch diese Vereinfachung ergibt sich die lineare Bewegungsgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (2.15)$$

In der Gleichung (2.6) wird die adiabatische Zustandsgleichung durch eine Taylorreihenentwicklung dargestellt. Bei der dargestellten Form ist ersichtlich, dass unter der Annahme der kleinen veränderlichen Dichte gegenüber der stationären Dichte des Mediums nach der Ungleichung (2.9a), alle höheren Terme sehr viel kleiner als der lineare Anteil sind. Dadurch kann der Abbruch der Taylorentwicklung nach dem linearen Anteil erfolgen, sodass sich

$$p = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \rho \quad (2.16)$$

ergibt. Abschließend wird der Ausdruck  $\kappa \frac{p_0}{\rho_0}$  entsprechend der Gleichung (2.7) mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit ersetzt. Daher geht die Gleichung (2.16) in

$$p = c_0^2 \rho \quad (2.17)$$

über.

Mithilfe der linearisierten akustischen Grundgleichungen (2.12, 2.15, 2.17) wird im Folgenden die lineare Wellengleichung und die Helmholtz Gleichung für den Schalldruck hergeleitet. Dazu wird zunächst die Schallwechseldichte  $\rho$  in der linearisierten Massengleichung durch den Schallwechseldruck  $p$  ersetzt. Anschließend wird die linearisierte Massengleichung (2.12) einmal zeitlich abgeleitet und geht somit in den folgenden Ausdruck über

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{v})}{\partial t} = 0. \quad (2.18)$$

Als zweites wird von der linearisierten Bewegungsgleichung (2.15) die Divergenz gebildet, wodurch sich der Zusammenhang

$$\rho_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{v})}{\partial t} + \Delta p = 0 \quad (2.19)$$

ergibt. Abschließend werden diese zwei Gleichungen voneinander subtrahiert und es folgt daraus die lineare Wellengleichung für den Schalldruck [27, 29]. Diese Gesetzmäßigkeit wird durch die Gleichung

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.20)$$



dargestellt. Anhand der Fourier Transformation werden die zeitlich abhängigen physikalischen Größen der Wellengleichung in den Frequenzbereich überführt. Dadurch geht die Wellengleichung in die Helmholtz Gleichung über. Diese Differentialgleichung hat die folgende Gestalt

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0. \quad (2.21)$$

In dieser Gleichung entspricht  $\omega$  der Kreisfrequenz, welche die Einheit  $\text{rad s}^{-1}$  besitzt. Mithilfe  $k = \frac{\omega}{c_0}$  wird häufig der zweite Ausdruck zusammengefasst. Hierbei beschreibt  $k$  die Wellenzahl und hat die Einheit  $\text{m}^{-1}$ . Daher wird die Helmholtz Gleichung durch die Gleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (2.22)$$

beschrieben. Diese Form der linearisierten Wellengleichung soll im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden. Durch eine integrale Beschreibung wird diese Gleichung im nächsten Abschnitt gelöst. Dazu wird zunächst noch eine Integraltransformation auf den Rand vorgenommen und die benötigten Randbedingungen definiert.

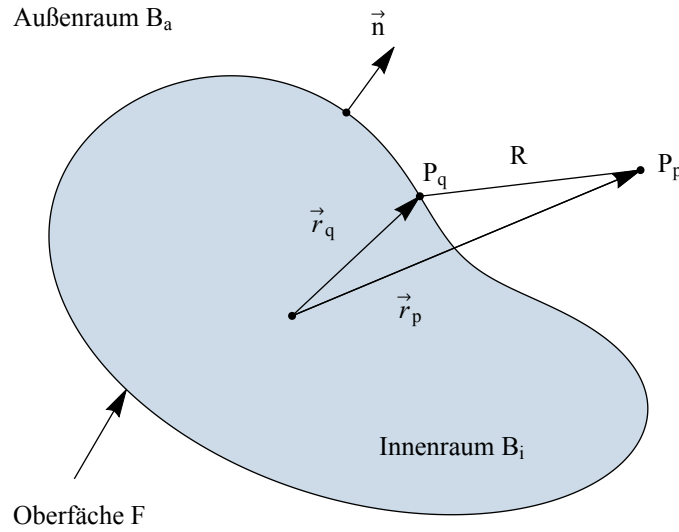
---

### 2.3 Kirchhoff-Helmholtz Integral

---

Bei der Berechnung und Simulation akustischer Felder, welche auf der linearen Wellengleichung (2.20) beziehungsweise der Helmholtz Gleichung (2.22) oder den linearen Euler'schen Gleichungen (2.12, 2.15) beruhen, haben sich eine Vielzahl analytischer und numerischer Verfahren etabliert. Dabei werden die Differentialgleichungen zum einen in ihrer differentiellen Form gelöst, wie beispielsweise mithilfe der Finiten Zeitdifferenzen Methode (FDTD) [33]. Des Weiteren gibt es auch Simulationsverfahren, bei denen die integrale Beschreibung gelöst wird. Dazu gehören beispielsweise die Randlementeverfahren (BEM) oder die Finite Elemente Methode (FEM). Durch die Vielzahl von möglichen Berechnungsverfahren, eignen sich diese hinsichtlich der Genauigkeit und der Rechenintensität mehr oder weniger für die jeweilige Problemstellung oder führen überhaupt zu einer Lösung des Problems. Anhand der zu berechnenden Schallabstrahlung ebener Strahler, wie beispielsweise Kolbenstrahler oder akustischer Gruppenwandler, in ein unendlich ausgedehntes Medium haben sich Methoden, die über den Rand beschrieben werden, bewährt. Aus diesem Grund wird die zuvor entwickelte Helmholtz Gleichung über eine integrale Darstellung gelöst. Hierbei erfolgt eine Transformation des Integrals auf den Rand. Bevor eine detaillierte mathematische Beschreibung und Herleitung des Kirchhoff-Helmholtz Integrals erfolgt, soll zunächst eine physikalische Beschreibung des zu lösenden Problems dargestellt werden.

Eine beliebige geschlossene Oberfläche  $F$  befindet sich in einem unendlich ausgedehnten Medium (Abbildung 2.1). Diese geschlossene Oberfläche unterteilt das gesamte Gebiet in zwei Bereiche, einen Innenraum  $B_i$  und einen Außenraum  $B_a$  [34]. Bei dieser geschlossenen Oberfläche handelt es sich nicht um eine physikalische oder geometrische Grenze, wie sie beispielsweise bei Materialübergängen vorkommt, sondern ist vielmehr eine beliebig gewählte künstliche Grenze. Auf dieser Oberfläche befinden sich alle akustischen Quellen und Senken, beziehungsweise es werden die Randbedingungen an den jeweiligen Stellen auf der Oberfläche angegeben. Die zwei Randbedingungen, die entlang der Oberfläche verwendet werden, sind der Schalldruck und die Schallschnelle. Dabei ist der Druck eine skalare Größe und entspricht somit den Dirichlet Randbedingungen. Währenddessen ist die Schallschnelle eine vektorielle Größe, mit der die Neumann Randbedingungen angegeben werden [35]. Aufgrund der Verknüpfung der beiden physikalischen Größen miteinander, kann durch sie ein Randwertproblem beschrieben werden. Sind sowohl der Schalldruck, als auch die Schallschnelle auf der gesamten Oberfläche bekannt, kann das akustische Feld für den gesamten Außenraum oder den gesamten Innenraum berechnet werden. Jedoch sind diese beiden Randbedingungen voneinander abhängig und häufig ist nur eine der beiden Randbe-



**Abbildung 2.1.:** Lösung der Helmholtz Gleichung über das Oberflächenintegral mithilfe des KHI's. Die Schallabstrahlung in den Außenraum  $B_a$  erfolgt durch die Schallquellen, die sich auf der umschlossenen Fläche  $F$  befinden [34].

dingung bekannt. Daher muss entweder die Schallschnelle oder der Schalldruck auf der Oberfläche aus der anderen Randbedingung ermittelt werden [34].

Die mathematische Beschreibung dieses physikalischen Sachverhalts erfolgt unter der Zuhilfenahme des zweiten Green'schen Satzes. Dieser ist ein besonderer Anwendungsfall des Gauß'schen Satzes, bei dem ein Volumenintegral in ein Oberflächenintegral überführt wird. Die Integration der Stärke der Quellen und Senken innerhalb des Volumens entsprechen dabei dem Fluss durch die umschließende Oberfläche. Im Gegensatz zu dem Gauß'schen Satz wird bei dem Green'schen Satz das Divergenztheorem auf die Feldgröße angewendet. Dabei werden zwei Funktionen, die mindestens zweimal differenzierbar sein müssen, verwendet. Das eigentliche Vektorfeld  $\vec{U}$  wird daher durch  $\vec{U} = f_\omega \nabla g_\omega - g_\omega \nabla f_\omega$  ausgedrückt [35]. Die Funktionen  $f_\omega$  und  $g_\omega$  seien dann die zweifach differenzierbaren Funktionen. Diese werden nun in den Gauß'schen Satz eingesetzt und es ergibt sich

$$\iiint_V f_\omega \Delta g_\omega - g_\omega \Delta f_\omega dV = \oiint_F (f_\omega \nabla g_\omega - g_\omega \nabla f_\omega) \cdot \vec{n} dF, \quad (2.23)$$

welcher der zweite Green'sche Satz ist. Mit diesem Integralsatz kann nun die Wellengleichung (2.20) oder die Helmholtz Gleichung (2.22) bezogen auf deren Randbedingungen gelöst werden. Der zweite Green'schen Integralsatz kann sowohl für transiente als auch harmonische Signalformen angewendet werden. Aufgrund der Verwendung von harmonischen Signalen in dieser Arbeit, bezieht sich jedoch die weitere Herleitung auf die Helmholtz Gleichung. Eine Herleitung für zeitlich abhängige Größen wäre aber genauso möglich, dennoch wird dieser nicht weiter nachgegangen. Dazu wird die zunächst beliebige Funktion  $f_\omega$  durch den Schalldruck mit  $f_\omega = p(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  ersetzt, wobei  $p(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  die Helmholtz Gleichung erfüllt. Die zweite Funktion ist  $g_\omega = g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  und diese muss die Gleichung

$$\Delta g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) + k^2 g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = -\delta(\vec{r}_p - \vec{r}_q) \quad (2.24)$$

erfüllen [32]. Werden die Gleichungen (2.22) und (2.24) in den zweiten Green'schen Satz eingesetzt, folgt daraus die Gleichung

$$\iiint_V p(-k^2 g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_p)) + g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) k^2 p dV = \oiint_F (p \nabla g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) - g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \nabla p) \cdot \vec{n} dF. \quad (2.25)$$

Mithilfe des Dirac Impulses an der Stelle des Raumpunktes  $\vec{r}_p$  wird das Volumenintegral gelöst. Dadurch ergibt sich der Schalldruck an dieser Stelle durch die Integration über die Oberfläche nach

$$p(\vec{r}_p) = \oiint_F p(\vec{r}_q) \frac{\partial g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{\partial n} - \frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) dF. \quad (2.26)$$

Die Normalenableitung des Schalldrucks kann durch die linearisierte Impulsgleichung (2.15) in die Schallschnelle, die in die Normalenrichtung der Oberfläche zeigt, überführt werden. Anhand der Fourier Transformation wird die zeitlich abhängige Gleichung in den Frequenzbereich überführt. Diese Gleichung ergibt sich somit zu

$$\frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} = -j\omega \rho_0 v_n(\vec{r}_q). \quad (2.27)$$

Mithilfe dieser Gleichung kann der Druck mit den zwei physikalischen Randbedingungen des Schalldrucks und der Schallschnelle beschrieben werden. Dadurch geht die Gleichung (2.26) in

$$p(\vec{r}_p) = \oiint_F p(\vec{r}_q) \frac{\partial g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{\partial n} + j\omega \rho_0 v_n(\vec{r}_q) g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) dF \quad (2.28)$$

über [35]. Dieser Ausdruck ist von besonderer Bedeutung, da der Druck in einem Raumpunkt nur über die Quellverteilung von Monopolen und Dipolen auf der Oberfläche berechnet werden muss. Hierbei ist der erste Term des Integrals ein Dipol und der zweite Term ist ein Monopol. Der Dipolterm ist durch die Normalenableitung der Funktion  $g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  gekennzeichnet. Die Stärke der Dipole ist durch die Quellverteilung des Drucks auf der Oberfläche gegeben. Während beim Monopol die Funktion  $g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  und bei diesem die Stärke durch die Quellverteilung der Schallschnelle gegeben ist.

Die beschriebene Funktion  $g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  wird als Green'sche Funktion bezeichnet. Die exakte Gestalt dieser Funktion wird maßgeblich durch die Differentialgleichung und den Beschränkungen des Volumens vorgegeben. Es existieren bereits für eine Vielzahl von Differentialgleichungen mit verschiedenen Randbedingungen Green'sche Funktionen [36]. In dieser Literatur wird auch die Green'sche Funktion für die dreidimensionale Helmholtz Gleichung in kartesischen Koordinaten angegeben. Die dort dargestellte Variante ist die folgende Funktion

$$g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}, \quad (2.29)$$

welche auch in dieser Arbeit verwendet wird. Diese Green'sche Funktion wird als fundamentale Lösung bezeichnet, da sie sich auch bei veränderten Randbedingungen überführen lässt [36]. Diese Randbedingungen könnten zum Beispiel Ebenen mit schallharten oder schallweichen Eigenschaften sein. Dabei haben schallharte Wände die Eigenschaft, dass die Normalenrichtung der Schallschnelle  $v_n = 0 \text{ m s}^{-1}$  auf der Oberfläche ist. Im Gegensatz dazu sind schallweiche Wände, wenn der Schalldruck  $p = 0 \text{ Pa}$  auf der

Fläche ist [37]. Die in der Gleichung (2.29) verwendete Funktion  $R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  ist der Euklidische Abstand zwischen dem Aufpunktvektor  $\vec{r}_p$  und dem Quellvektor  $\vec{r}_q$ . Er wird durch

$$R(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = |\vec{r}_p - \vec{r}_q| \quad (2.30a)$$

$$= \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2} \quad (2.30b)$$

gebildet.

Die hergeleitete Integralgleichung (2.28) mit der Fundamentallösung (2.29) sind die wichtigsten verwendeten Gleichungen für die in dieser Arbeit eigenen entwickelten Programme. Mithilfe dieser wird in dem Kapitel 3.5 ein Randlementeverfahren erläutert, mit dem äußerst effektiv der Schalldruck in einem großen Volumen berechnet werden kann. Außerdem wird diese Integralgleichung für die Herleitung des Rayleigh Integrals, welche im folgenden Kapitel erläutert wird, verwendet.

---

## 2.4 Halbunendliche Räume

---

Basierend auf dem zuvor entwickelten KHI wird in diesem Kapitel ein Spezialfall erläutert. Dieser Spezialfall wird durch das Einführen einer unendlich ausgedehnten Ebene erzeugt und unterteilt das gesamte Gebiet in zwei Halbräume. Die verwendete Ebene wird hierbei als schallhart angenommen. Unter dieser Annahme vereinfacht sich das KHI, sodass die Dipolterme wegfallen und nur noch die Monopolterme übrig bleiben. Daraus ergibt sich ein wesentlicher Vorteil, da nur noch die Schallschnelle auf der Oberfläche bekannt sein muss und eine direkte Integration erfolgen kann. Aus diesem Grund bedarf es keiner zusätzlichen Berechnung des Schalldrucks auf der Oberfläche. Anhand der Integration werden zwei analytische Lösungen für kreisförmige Kolbenstrahler dargestellt, mit denen der Schalldruck exakt für diese Spezialfälle berechnet werden kann. Diese zwei Lösungen werden für die Fehlerbetrachtung beziehungsweise für die Verifikation der im weiteren Verlauf dieser Arbeit entwickelten Modelle verwendet.

---

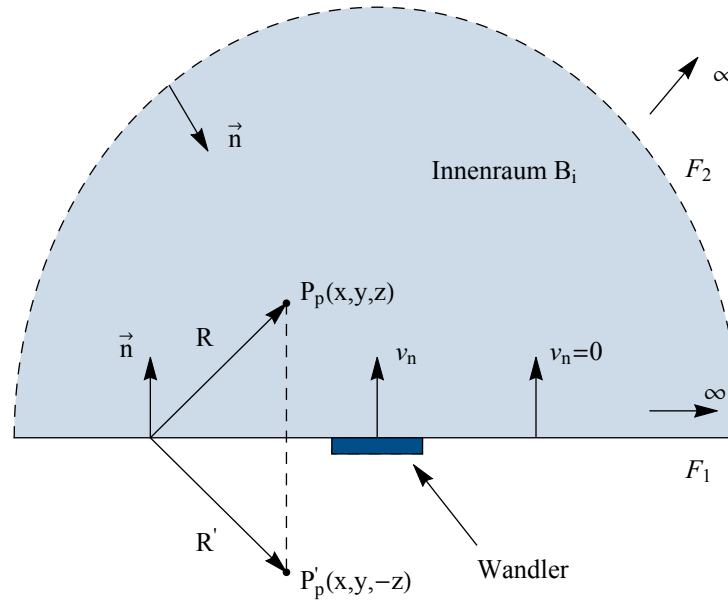
### 2.4.1 Rayleigh Integral

---

Die ursprüngliche Entwicklung der Schallabstrahlung von ebenen Kolbenstrahlern in einen Halbraum basiert auf der Potentialtheorie von Rayleigh [38]. Hierbei beruht die grundsätzliche Herleitung auf der Helmholtz Gleichung, die mithilfe eines Potentialansatzes gelöst wird. Es wird angenommen, dass sich die Schallquelle in einer unendlich ausgedehnten Ebene befindet, die entweder schallhart oder schallweich ist. Dadurch werden entweder die Dirichlet oder Neumann Randbedingungen festgelegt. Es werden zwei Integrale zur Schallfeldberechnung erläutert, die je nach Wahl der Randbedingungen als Rayleigh Integral vom Typ I oder Typ II bezeichnet werden [35]. Diese Integrale enthalten je nach verwendeten Typ entweder die Schallschnelle oder den Schalldruck als Quellverteilung. Eine weitere verbreitete Variante dieses Rayleigh Integral zu ermitteln, ist über die fundamentale Lösung der Helmholtz Gleichung möglich. Diese Herleitung bietet den großen Vorteil, dass eine beliebige Anzahl und Kombination von schallharten und schallweichen Wänden bei der Integration berücksichtigt werden können. Dadurch bietet sich die Möglichkeit Symmetrien der Wandler durch Spiegelungen auszunutzen und somit die Integration zu vereinfachen. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Herleitung über die fundamentale Lösung gezeigt und es wird die Annahme getroffen, dass die umgebende Wand schallhart ist und daher das Rayleigh Integral des Typ I vorliegt.

Wie bereits erwähnt wurde, benötigt das KHI eine geschlossene Fläche, um den Schalldruck für einen beliebigen Raumpunkt in dem Volumen zu berechnen. Bei der bisherigen Darstellung wurde das Integral für die Berechnung von Raumpunkten, die außerhalb des umschlossenen Körpers liegen, dargestellt. Jedoch kann auch der Schalldruck für innerhalb liegende Raumpunkte berechnet werden, dazu muss jedoch der Normalenvektor der Fläche in die entgegengesetzte Richtung zeigen [39]. Im Allgemeinen

soll sich die abgestrahlte Schallwelle des Ultraschallwandlers in einem unendlich ausgedehntem Volumen ausbreiten können. Dazu kann zwar auch das KHI verwendet werden, jedoch müssen hierfür die Schallschnelle und der Schalldruck auf der umschließenden Fläche bekannt sein. Durch die Einschränkung, dass sich die Welle nur in einen Halbraum ausbreiten kann, vereinfacht sich die Berechnung. Das prinzipielle Modell (Abbildung 2.2) wird zur Simulation der Schallabstrahlung einer akustischen Apertur in einen Halbraum verwendet.



**Abbildung 2.2.:** Modell zur Schallfeldberechnung in einen Halbraum von einer akustischen Apertur, die sich in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand befindet [35].

Anhand dieses Modells ist ersichtlich, dass sich die Oberseite oder Öffnung eines Ultraschallwandlers in einer unendlich ausgedehnten Ebene befindet. Diese Ebene wird im Unendlichen geschlossen, sodass es eine umschließende Oberfläche des Innenraums  $B_i$  gibt. Dabei setzt sich diese Oberfläche aus den zwei Teilflächen  $F_1$  für die schallharte Wand und die Fläche  $F_2$  im Unendlichen zusammen [35]. Bei dieser Art des Modells sollen die Flächennormalen in das Volumeninnere zeigen. Innerhalb des Innenraums wird die Schallfeldberechnung für einen beliebigen Punkt  $P_p$ , der den Abstand zur Oberfläche  $R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  besitzt, durchgeführt. Der Punkt  $P'_p$  ist hierbei der Spiegelpunkt des Feldpunktes bezogen auf die schallharte Wand. Darüber hinaus ist die Schallschnelle auf der schallharten Wand  $v_n = 0$ , während sie auf der Wandleroberfläche  $v_n$  beträgt.

Die Herleitung des Rayleigh Integrals basiert auf dem Ansatz, dass das KHI entweder auf die Monopolterme oder Dipolterme reduziert wird. Durch diesen erfolgt dann die Berechnung über eine direkte Integration, ohne zunächst die Berechnung der anderen abhängigen Schallfeldgröße durchzuführen. Aufgrund der umgebenen schallharten Wand des Ultraschallwandlers wird daher der Dipolanteil des KHI's durch die Normalenableitung der Green'schen Funktion vernachlässigt. Daher ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{\partial g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{\partial n} = 0, \quad (2.31)$$

wobei in diesem Fall die genaue Form der Green'schen Funktion nicht bekannt ist. Aus diesem Grund ist es nicht möglich, die Normalenableitung der Green'schen Funktion für das KHI zu entfernen. Dennoch wird mit dieser Bedingung die Green'sche Funktion ermittelt. Dabei bildet Fundamentallösung die Grundlage für die zu ermittelnde Green'sche Funktion, sodass sie um eine weitere Funktion  $\Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$

erweitert wird. Der gemachte Ansatz ist zwar allgemein gültig, trotzdem lässt sich diese Funktion für beliebige Oberflächen häufig schwer ermitteln. Dennoch existieren bereits für einfache Geometrien die Funktionen  $\Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  beziehungsweise die Green'sche Funktion mit den entsprechenden Randbedingungen [36]. Die Green'sche Funktion ergibt sich daher zunächst zu

$$g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} + \Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q). \quad (2.32)$$

Diese Green'sche Funktion wird mit der Bedingung (2.31) in das KHI (2.26) eingesetzt. Dabei wird das Oberflächenintegral in die zwei Flächenintegrale  $F_1$  und  $F_2$  unterteilt und somit wird das KHI in

$$p(\vec{r}_p) = \iint_{F_1} \frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} + \Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \right) dF_1 + \iint_{F_2} \frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} + \Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \right) dF_2 \quad (2.33)$$

überführt. In diesem Ausdruck ist bereits der Dipolterm nicht mehr vorhanden und es müssen eigentlich nur noch zwei Flächenintegrale gelöst werden. Hierbei ist zunächst das Integral für die Fläche  $F_2$  von besonderer Bedeutung, weil sich diese an die unendlich ausgedehnte Ebene  $F_1$  anschließt. Dadurch ergibt sich auch ein großer Abstand  $R(\vec{r}_q)$  zwischen der Fläche  $F_2$  und dem Punkt innerhalb des Volumens  $B_i$ . Ist dieser Abstand groß genug, sodass die Fläche im Unendlichen keinen Anteil mehr an dem Schalldruck besitzt, ergibt sich für das Flächenintegral  $F_2$

$$\iint_{F_2} \frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} + \Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \right) dF_2 = 0. \quad (2.34)$$

Aufgrund dieser Annahme ist nur das Flächenintegral über die schallharte Wand übrig geblieben [35]. Die viel wichtigere Eigenschaft dieses Ansatzes ist hierbei, dass sich die Funktion  $\Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  nun einfacher ermitteln lässt. Durch den Wegfall der zweiten Fläche muss die Bedingung (2.31) nur noch für die erste Fläche erfüllt sein. Daher ergibt sich für die Normalenableitung für die Funktion

$$\frac{\partial \Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left( jk + \frac{1}{R(\vec{r}_q)} \right) \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} \frac{\partial R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{\partial n}. \quad (2.35)$$

Befindet sich die schallharte Wand in der xy-Ebene, dann folgt für die Normalenableitung nur eine Abhängigkeit der z-Komponente. Durch die Spiegelung an dieser Ebene unterscheiden sich die Punkte  $P_p$  und  $P'_p$  nur durch die z-Komponente. Anhand dieses Ansatzes ergibt sich die Funktion

$$\Gamma(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jkR'(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R'(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} \quad (2.36)$$

mit  $R'(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p + z_q)^2}$ .

Hierbei ist die Euklidische Distanz  $R'(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  der Abstand zwischen den Punkten auf der Fläche  $F_1$  und dem Punkt  $P'_p$ . Befinden sich nun alle Quellen des Schallfeldes auf dieser Ebene und haben daher keine

z-Abhängigkeit, kann die Green'sche Funktion vereinfacht werden. In diesem Fall folgt für die Green'sche Funktion gerade die doppelte Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung. Für das KHI ergibt sich somit

$$p(\vec{r}_p) = -\frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF, \quad (2.37)$$

welches in dieser Form als Rayleigh Integral vom Typ I bezeichnet wird. Dieses Integral kann auch durch die Schallschnelle mithilfe der Gleichung (2.27) beschrieben werden. Das Integral lässt sich dann zu

$$p(\vec{r}_p) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \iint_F v_n(\vec{r}_q) \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF \quad (2.38)$$

transformieren [35]. Für einen Kolbenstrahler, bei dem sich die Schallschnelle homogen über die Platte verteilt, ist diese unabhängig von der Integration über die Fläche. Aus diesem Grund wird die Schallschnelle in der Normalenrichtung vor das Integral gezogen. Häufig wird jedoch das Druckverhältnis zwischen dem Schalldruck auf der Oberfläche  $p_{\text{ober}}$  und dem Schalldruck im Feldpunkt angegeben [14]. Dazu wird die Schallschnelle mithilfe der spezifischen akustischen Impedanz in den Schalldruck auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers überführt. Die spezifische Impedanz ist über das Druck und Schnelle Verhältnis definiert, welches in der Form

$$z_s = \frac{p}{v} = \rho_0 c_0 \quad (2.39)$$

gilt. Hierbei entspricht  $z_s$  der spezifischen Impedanz des Mediums und hat die Einheit  $\text{N s m}^{-3}$ . Durch das Einführen der spezifischen Impedanz kann das vorherige Integral durch das Verhältnis zwischen dem Schalldruck in dem Raumpunkt  $\vec{r}_p$  und dem Schalldruck auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers ausgedrückt werden. Für dieses Verhältnis gilt dann das Integral

$$\frac{p(\vec{r}_p)}{p_{\text{ober}}} = \frac{jk}{2\pi} \iint_F \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF. \quad (2.40)$$

Dieses Integral eignet sich zur Schallfeldberechnung, wenn die Schallschnelle über die gesamte Oberfläche vorgegeben wird. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Schallschnelle in Normalenrichtung über der schallharten Wand gleich  $v_n = 0 \text{ m s}^{-1}$  ist. Analog dazu könnte auch die Herleitung des Rayleigh Integrals des Typ II erfolgen, bei dem die Randbedingung des Schalldrucks bestimmt werden. Dann wäre jedoch eine schallweiche Wand vorhanden, auf der  $p = 0 \text{ Pa}$  gelten würde. Jedoch wird in dieser Arbeit nur eine schallharte Wand verwendet, sodass auf die Herleitung von dem Rayleigh Integral des Typ II verzichtet wird.

Darüber hinaus eignet sich die erläuterte Methode der unendlichen Ebenen hervorragend zum Einführen von Symmetrieebenen, mit denen die Schallfeldberechnungen bei symmetrischen Anordnungen effizienter durchgeführt werden können. Dazu wird immer der Ansatz der Gleichung (2.32) verwendet und darauf aufbauend werden die Green'schen Funktionen ermittelt. Es gibt bereits sehr viele Lösungen der Green'schen Funktion in den verschiedenen Koordinatensystemen, sodass nicht nur Ebenen, sondern auch beispielsweise Zylinder mit entsprechenden Randbedingungen verwendet werden können. Diese Varianten stellen dann Erweiterungen des hier gezeigten Rayleigh Integrals dar, jedoch bedeuten diese veränderten Green'schen Funktionen Einschränkungen der allgemeinen Schallabstrahlung. Aufgrund der Allgemeingültigkeit von beliebigen Formen von Kolbenstrahlern, wird daher im weiteren Verlauf



ausschließlich das oben gezeigte Rayleigh Integral verwendet, wenn der Kolbenstrahler sich in einer unendlich ausgedehnten Ebene befindet.

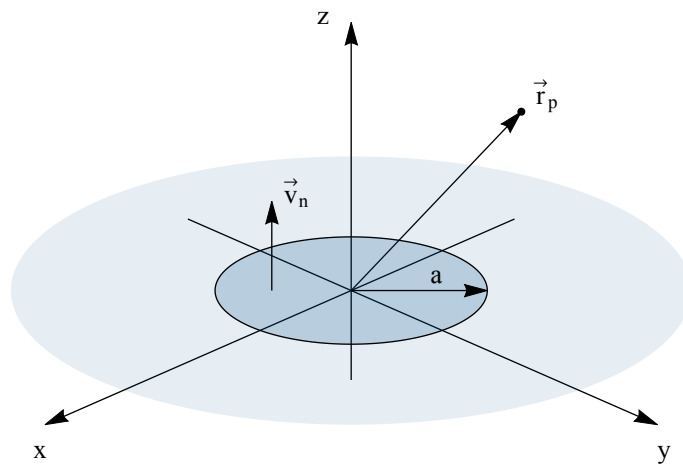
Abschließend sei erwähnt, dass die Modellierung mit dem Rayleigh Integral ein Spezialfall des KHI's ist, mit dem näherungsweise das Schallfeld berechnet werden kann. Anhand der Kenntnis über die Schallschnelle kann die Abstrahlung in den Halbraum berechnet werden. Jedoch stellt dieses Modell durch die Verwendung der unendlichen Ebene an die Realität eine wesentliche Bedingung. Die unendlich ausgedehnte schallharte Wand lässt sich praktisch nicht herstellen und bedarf daher einer gesonderten Betrachtung. Im Kapitel 3.5.3 wird dazu numerisch das KHI, welches keine Einschränkung des Modells besitzt, gelöst und es wird ein Vergleich zum Rayleigh Integral durchgeführt. Dennoch eignet sich das Rayleigh Integral häufig für die Schallfeldberechnung von vielen verschiedenen Ultraschallwandlern. Aber es müssen bei dessen Verwendung auch die Grenzen dieses Modells berücksichtigt werden.

---

#### 2.4.2 Analytische Lösungen für kreisförmige Kolbenstrahler

---

Auf Basis des Rayleigh Integrals gibt es nur einige wenige analytische Lösungen zur Berechnung der Schallabstrahlung von Kolbenstrahlern. Dabei gibt es keine analytische Lösung, mit der der Schalldruck in einem Volumen berechnet werden kann, sondern nur Unterräume von diesem. Für die Untersuchung der numerischen Integration und den Simulationsergebnissen von den erstellten Modellen können diese analytischen Lösungen aber sehr gut zur Verifikation verwendet werden. Durch eine Fehlerbetrachtung mit diesen Lösungen wird dann überprüft, ob die numerischen Lösungen hinreichend genau berechnet sind und damit auch für die Simulation der Schallausbreitung im gesamten Raum verwendet werden können. In dieser Arbeit wird für die kreisförmigen Kolbenstrahler (Abbildung 2.3) die Verifikation der numerischen Lösungen mit den analytischen Lösungen durchgeführt.



**Abbildung 2.3.:** Modellbildung zur Berechnung der Schallabstrahlung von einem kreisförmigen Ultraschallwandler in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand mit dem Rayleigh Integral.

Der dargestellte Kolbenstrahler mit dem Radius  $a$  und der Einheit m befindet sich in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Dieser Kolbenstrahler vibriert mit einer homogenen Schallschnelle  $v_n$ . Der Mittelpunkt des Kolbenstrahlers befindet sich im Koordinatenursprung und die z-Achse, auch Hauptachse genannt, befindet sich senkrecht auf der Oberfläche. Der Feldpunkt  $P_p$  wird durch den Vektor  $\vec{r}_p$ , der im Ursprung des Koordinatensystem beginnt, beschrieben. In diesem Feldpunkt wird der Schalldruck berechnet.



Anhand der gewählten Form des Kolbenstrahlers gibt es zwei analytische Lösungen, die im Folgenden kurz beschrieben werden. Die erste Lösung entspricht dem Schalldruck auf der Hauptachse des Kolbenstrahlers [3, 27]. Für diesen Fall kann das Rayleigh Integral gelöst werden und der Schalldruck für diese Feldpunkte berechnet werden. Dazu wird zunächst das Integral für den speziellen Fall aufgestellt. Es folgt somit für das Rayleigh Integral für einen kreisförmigen Kolbenstrahler

$$\frac{p(z_p)}{p_{\text{ober}}} = \frac{jk}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+z_p^2}}}{\sqrt{r^2+z_p^2}} r dr d\varphi. \quad (2.41)$$

Diese Gleichung beschreibt die Integration über die Kolbenoberfläche für die Feldpunkte auf der z-Achse. Es existiert keine Abhängigkeit bezüglich der  $\varphi$ -Komponente für den Integranden, sodass die Integration zuerst ausgeführt wird. Als nächstes wird das Integral für das  $r$  bestimmt, wobei der Wurzel Ausdruck des Exponenten substituiert wird. Damit lässt sich auch dieses Integral lösen und es ergibt sich durch Resubstitution

$$\frac{p(z_p)}{p_{\text{ober}}} = e^{-jkz_p} - e^{-jk\sqrt{a^2+z_p^2}} \text{ mit } z_p \geq 0. \quad (2.42)$$

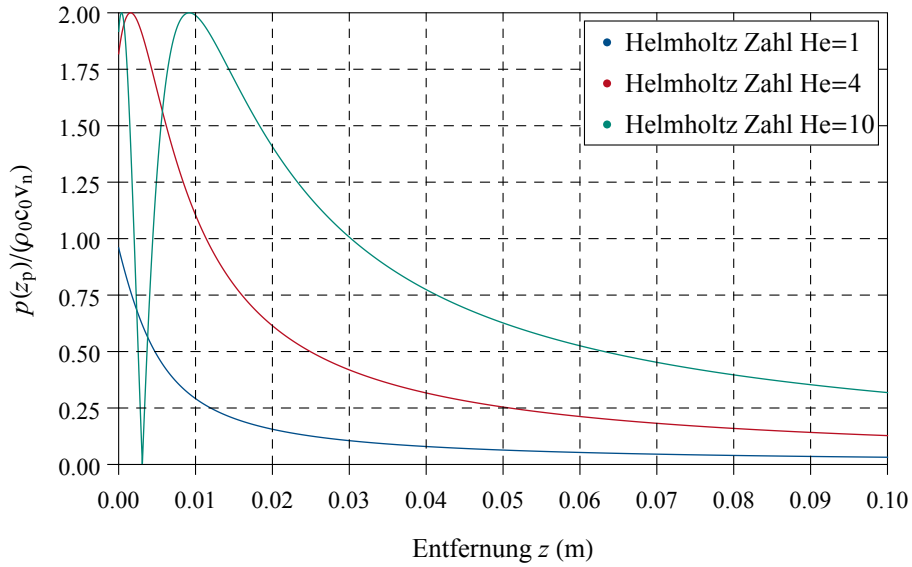
Hierbei wird angenommen, dass sich die Feldpunkte in dem oberen Halbraum befinden, weshalb  $z_p \geq 0$  gilt. Der gezeigte Ausdruck ist die Lösung des Rayleigh Integrals [3, 27] und spiegelt zunächst das Verhältnis des Drucks auf der z-Achse und des Drucks auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers wider. Jedoch ist dieser Ausdruck dimensionslos und muss bei Bedarf in eine physikalische Größe überführt werden. Dazu muss nur der Druck  $p_{\text{ober}}$  berechnet und mit der Lösung aus der Gleichung multipliziert werden.

Im Allgemeinen kann aber dem Ausdruck entnommen werden, dass der Funktionsverlauf nur von der Entfernung  $z_p$  und den Parametern  $a$  und  $k$  abhängt. Hierbei hat sich bewährt, die Parameter durch die dimensionslose Größe der Helmholtz Zahl auszudrücken. Diese wird nach

$$He = ka \quad (2.43)$$

berechnet [40]. Mit dieser Helmholtz Zahl wird das Produkt aus der charakteristischen Länge und der Wellenzahl gebildet. Alternativ kann auch das Verhältnis zwischen der charakteristischen Länge und der Wellenlänge ermittelt werden. Die charakteristische Länge ist bei der Abstrahlung von Kolbenstrahlern gerade der Radius  $a$ . Das Besondere bei diesem Ausdruck ist, dass sich bei gleichen Helmholtz Zahlen die selben Funktionsverläufe ausbilden. Hierbei unterscheiden sie sich nur durch die Längen auf der z-Achse, an denen sich die charakteristischen Merkmale ausbilden. Werden die Längen der z-Achse auch auf die Wellenlänge skaliert, so bilden sich stets die identischen Verläufe bei gleichen Helmholtz Zahlen aus.

Es wurden drei Helmholtz Zahlen ausgewählt, mit denen der Verlauf des Schalldrucks (Abbildung 2.4) entlang der z-Achse untersucht und erläutert werden. Hierbei wird der Schalldruck auf den Schalldruck auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers bezogen. Zum Vergleich wurden eine sehr kleine Helmholtz Zahl von  $He = 1$  und die zwei Helmholtz Zahlen  $He = 4$  und  $He = 10$  ausgewählt. Es hätten auch weitaus größere Helmholtz Zahlen verwendet werden können, jedoch eignen sich die hier genannten sehr gut um das allgemeine Verhalten zu beschreiben. Zunächst ist der bezogene Schalldruck auf einen Wert zwischen  $0 \leq \frac{p(z_p)}{p_{\text{ober}}} \leq 2$  begrenzt. Dadurch kann der physikalische Schalldruck weder durch den Radius des Kolbenstrahlers noch der Wellenzahl weiter erhöht werden. Dieses ist nur durch das Medium und die vorhandene Schallschnelle auf der Oberfläche des Wandlers möglich. Des Weiteren bildet sich bei einer kleinen Helmholtz Zahl weder ein Maximum noch ein Minimum des Schalldrucks aus. Sondern er verläuft in diesem Fall asymptotisch abnehmend gegen null. Bei der Helmholtz Zahl  $He = 4$  bildet



**Abbildung 2.4.:** Berechnung des Schalldrucks entlang der z-Achse für einen kreisförmigen Ultraschallwandler mit dem Radius  $a = 6,4\text{ mm}$  in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Der ermittelte Schalldruck wird auf den Druck auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers bezogen.

sich zwar ein Maximum aus aber kein Minimum. Nachdem das Maximum erreicht wurde, fällt es ebenso asymptotisch ab und strebt gegen null. Bei der Helmholtz Zahl  $He = 10$  bilden sich sowohl ein Minimum als auch ein Maximum des Schallfeldes aus. Nach dem Erreichen des letzten Maximum fällt auch dieses gegen den Wert null mit zunehmenden Abstand zum Kolbenstrahler. Dieses Verhalten ist durch die Interferenz begründet, die sich entlang mit z-Achse konstruktiv und destruktiv auswirkt. Im Allgemeinen hat der Kolbenstrahler zwar die selbe Erregungsfrequenz, jedoch überlagern sich die Wellenzüge der einzelnen Anteile über die Fläche des Kolbenstrahlers. Anhand der räumlichen Unterschiede auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers ergibt sich eine verschiedene Phasenlage. Diese verursacht, je nach Lage des Feldpunktes auf der z-Achse eine konstruktive oder destruktive Interferenz [2]. Dadurch bilden sich die Minima und Maxima ab einer bestimmten geometrischen Anordnung und Wellenzahl aus. Bei weiter ansteigenden Helmholtz Zahlen bilden sich immer mehr Minima und Maxima aus, während es bei kleinen Helmholtz Zahlen keine ausreichend große Interferenz gibt, sodass sich weder Minima noch Maxima ausbilden können.

Ab einer bestimmten Entfernung ist die Ausbildung von einem Maximum und Minimum durch die Interferenz nicht mehr möglich, sodass ab dieser Distanz vom Kolbenstrahler nur noch ein asymptotisches Verhalten vorliegt. Hierbei ist das letzte Maximum von besonderer Bedeutung, welches das Feld in zwei Bereiche unterteilt. Zu diesem gehört das Nahfeld, in dem die Interferenz einen Einfluss hat und zum Ausprägen der Minima und der Maxima beiträgt. Danach bildet sich das Fernfeld aus, in dem der Schalldruck asymptotisch gegen null strebt. Der Übergang zwischen Nahfeld und Fernfeld, beziehungsweise der Feldpunkt des letzten Maximums, kann nach der Gleichung

$$z_f = \frac{4a^2 - \lambda^2}{4\lambda} \quad (2.44)$$

berechnet [2] werden. Hierbei bezeichnet  $z_f$  die Nahfeldlänge bis zu der das Nahfeld gilt und ab der anschließend mit weiter wachsendem Abstand zum Kolbenstrahler das Fernfeld beginnt. Diese Gleichung ist grundsätzlich nur für den kreisförmigen Kolbenstrahler gültig, jedoch kann sie durch die Verwendung von Korrekturfaktoren für andere Formen wie Quadrate oder Rechtecke verwendet werden [2]. In die-

sen Fällen würde die angepasste Gleichung auch für den Übergang von Nahfeld und Fernfeld für diese Formen gelten.

Für die Berechnung des Schallfeldes im Fernfeld gibt es eine weitere analytische Lösung, mit der der Schalldruck berechnet werden kann. Hierbei wird das Produkt aus dem asymptotischen Verhalten und der Richtcharakteristik des Kolbenstrahlers gebildet. Das wesentliche Untersuchungsmerkmal ist die Richtwirkung des ausgesendeten Schallfeldes vom Kolbenstrahler. Eigentlich ist es sinnvoll die Feldpunkte auf einer kompletten Halbkugel im oberen Halbraum mit der Distanz  $R$  vom Kolbenstrahlermittelpunkt zu positionieren. Dadurch könnte das abgestrahlte Feld in alle Richtungen untersucht werden. Aufgrund der kreisförmigen Geometrie des Kolbenstrahlers ist dieses jedoch nicht unbedingt notwendig. Es reicht aus, wegen der Achsensymmetrie, einen Halbkreis als Ausschnitt der Halbkugel zur Charakterisierung der Schallfeldausbreitung im Fernfeld zu nutzen. Die Berechnung des Schalldrucks, bezogen auf den Druck auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers, entlang eines Halbkreises wird dann durch die Gleichung

$$\frac{p(R, \vartheta)}{p_{\text{ober}}} = \frac{ja}{R} e^{-jkR} \frac{J_1(ka \sin(\vartheta))}{\sin(\vartheta)} \quad (2.45)$$

gegeben [29]. In dieser Gleichung beschreibt der Winkel  $\vartheta$  den Öffnungswinkel zwischen der  $z$ -Achse und dem Feldpunkt. Normalerweise entspricht dieser Winkel dem Polarwinkel in sphärischen Koordinaten. In diesem Fall wird aufgrund der Symmetrie jedoch ein anderer Wertebereich für diesen angenommen. Der Winkel kann sowohl positive als auch negative Winkel im Bereich von  $-90^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ$  annehmen. Hierbei entsprechen die negativen Winkel der einen Hälfte des Halbkreises und die positiven Winkel der anderen Hälfte des Halbkreises. Des Weiteren wird die Bessel'sche Funktion  $J_1$  erster Art und Ordnung zum Beschreiben der Richtcharakteristik verwendet. In dieser wird als Funktionsterm das Produkt aus Helmholtz Zahl und dem Sinus des Winkels  $\vartheta$  eingesetzt. Während der hintere Teil der Gleichung (2.45) ausschließlich eine Abhängigkeit von  $\vartheta$  aufweist, stellt der vordere Teil die Größe der Amplitude in Abhängigkeit des Abstands  $R$  zwischen der Apertur und den Punkten auf dem Halbkreis dar. Aufgrund der angestrebten Untersuchung für den Polarwinkel und weniger in radialer Richtung, wird im Folgenden von dem normierten Schalldruck entlang des Halbkreises ausgegangen. Deshalb wird im weiteren Verlauf der Anteil für die Amplitude des Schallfeldes bei der Betrachtung der Richtcharakteristik vernachlässigt und der normierte Schalldruck verwendet. Aus diesem Grund ist für die Richtcharakteristik des Schallfeldes nur die Helmholtz Zahl und der Polarwinkel von Bedeutung.

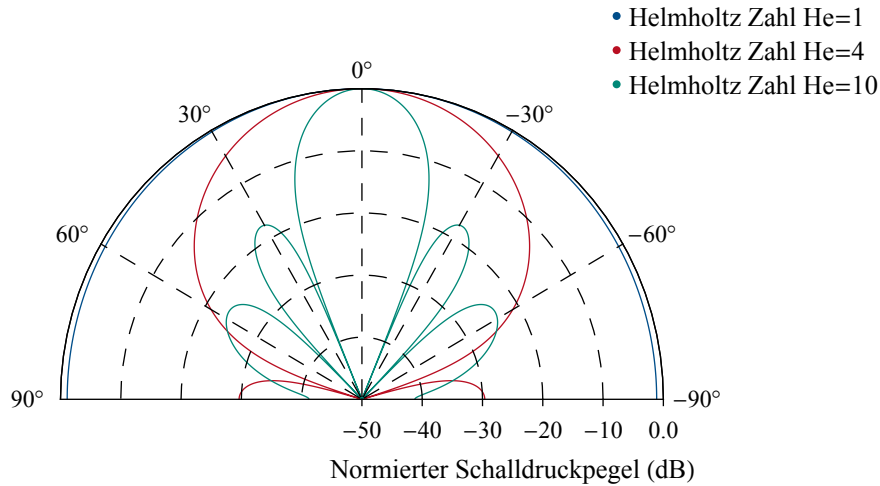
Neben dem reinen Schalldruck hat sich die Verwendung von Pegelmaßen bei der Beschreibung des Schalldruckes etabliert. Das liegt daran, dass der Schalldruck häufig um einige Potenzgrößen verläuft und es sich daher anbietet logarithmische Darstellungen zu verwenden. Diese Darstellungsform hätte auch schon bei dem Druckverlauf auf der  $z$ -Achse verwendet werden können, jedoch ist dort die Ausprägung nicht so groß wie bei der Richtcharakteristik. Der Schalldruckpegel wird mit der Gleichung

$$L_p = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|p(\vec{r}_p)|}{p_{\text{ref}}} \right) \quad (2.46)$$

berechnet [3]. Hierbei wird der Logarithmus von dem Verhältnis zwischen dem berechneten oder auch gemessenen Schalldruck und einem referenzierten Schalldruck berechnet. Der referenzierte Schalldruck ist materialabhängig und beträgt für das Medium Luft  $p_{\text{ref}} = 20 \mu\text{Pa}$  [3]. Der berechnete Schalldruck ist zunächst eine komplexe Größe und muss in eine reelle Größe überführt werden. Dazu wird der Effektivwert des Schalldrucks benötigt, der aus dem Betrag der komplexen Größe gebildet wird. Aufgrund der Verwendung von harmonischen Größen lässt sich dieser durch Teilung mit der  $\sqrt{2}$  berechnen.

Im Folgenden werden die selben Helmholtz Zahlen wie bei der Berechnung des Schalldrucks auf der  $z$ -Achse zur Darstellung der Richtcharakteristik von der Schallabstrahlung im Fernfeld verwendet. Die Richtcharakteristiken wurden für die drei ausgewählten Helmholtz Zahlen berechnet (Abbildung 2.5).

Dabei wurden die Richtcharakteristiken auf ihr jeweiliges Maximum normiert, sodass nur die Richtwirkung aber nicht die Beträge des Schallfeldes untersucht werden.



**Abbildung 2.5.:** Berechnung des Schalldruckpegels im Fernfeld für kreisförmige Kolbenstrahler in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Hierbei ist der Schalldruckpegel auf das Maximum normiert. Das Fernfeld wurde für einen Halbkreis in einem Abstand von 1 m zu dem Kolbenstrahler berechnet.

Es wird ersichtlich, dass sich bei einer kleinen Helmholtz Zahl der Schalldruck nahezu konstant auf dem Halbkreis ist. In diesem Fall wird der Schall kugelförmig ausgebreitet. Im Gegensatz dazu bilden sich bei den Helmholtz Zahlen  $He = 4$  und  $He = 10$  signifikantere Richtcharakteristiken aus. Bei den Richtcharakteristiken unterscheiden sich die Hauptkeulen und Nebenkeulen, welche durch die Nulldurchgänge des Schalldrucks getrennt sind. Hierbei besitzt die Hauptkeule den größten Schalldruck, während die Nebenkeulen kleinere Schalldruckwerte aufweisen [3]. Die Anzahl der Nebenkeulen ist stark von der Helmholtz Zahl abhängig und steigt mit dieser zunehmenden Größe an. Die Hauptkeule besitzt bei größeren Helmholtz Zahlen eine größere Amplitude im Verhältnis zu den Nebenkeulen, jedoch wird die Form der Hauptkeule deutlich schmaler und somit gerichteter. Je nach Anwendungsfall wird entweder eine gerichtete Schallabstrahlung oder eine gleichmäßige Ausbreitung des Schallfeldes benötigt. Für den speziellen Anwendungsfall wird dann entweder eine hohe oder niedrige Helmholtz Zahl ausgewählt.

Die zwei vorgestellten analytischen Lösungen werden zur Verifikation der Modelle und der Konvergenz der numerischen Werte verwendet. Dazu werden die Fehler der numerischen Lösungen für die analytischen Testfälle untersucht. Zwischen den zwei Testfällen muss allerdings noch deren Wichtigkeit unterschieden werden. Während die Lösung für den Schalldruck entlang der z-Achse für alle Feldpunkte auf der z-Achse gilt, ist bei der Betrachtung der Richtcharakteristik Vorsicht geboten. Dieses liegt an der Annahme, dass sich der Schalldruck im Fernfeld betrachtet wird. Zwar ist dieses theoretisch schon ab einer relativ kurzen Distanz möglich, jedoch ist es empfehlenswert die numerischen Werte für große Entfernungen zwischen dem Wandler und Feldpunkt vorzunehmen. Dadurch ist gewährleistet, dass die Lösung des Fernfeldes zur Verifikation verwendet werden kann.

Aus diesem Grund ist die Betrachtung des Fehlers auf der z-Achse, der sich nach der Gleichung

$$\varepsilon_z = \left( \frac{p(\vec{r}_p)}{p(z_p)} - 1 \right) \quad (2.47)$$

berechnet, wesentlich bedeutender als die Fehleranalyse im Fernfeld. In der gezeigten Gleichung entspricht  $\varepsilon_z$  dem Fehler auf der z-Achse, welcher in Prozent angegeben wird. Es wird für den Fehler das

---

Verhältnis zwischen der numerischen Lösung und der analytischen Lösung  $p(z_p)$  gebildet. Analog dazu wird der Fehler im Fernfeld nach der Gleichung

$$\varepsilon_\vartheta = \left( \frac{p(\vec{r}_p)}{p(\vartheta)} - 1 \right) \quad (2.48)$$

ermittelt. Dabei entspricht  $\varepsilon_\vartheta$  dem Fehler im Fernfeld, welcher ebenfalls in Prozent angegeben wird. Abschließend werden noch die Größenordnungen abgeschätzt, in dem der numerische Fehler oder die Ungenauigkeit des Modells auftreten darf. Ziel ist es, ein möglichst akkurates Modell zu entwickeln und damit zuverlässige Ergebnisse zu berechnen. Diese Ergebnisse sollen im besten Fall mit den Messungen, welche im Kapitel 4 durchgeführt werden, übereinstimmen. Jedoch kann dieses nicht gewährleistet werden, zum einen durch Messunsicherheit des Systems und zum anderen durch die idealisierte Modellierung der Schallwellenausbreitung. Die numerischen Berechnungen und Modellbildungen sollen deshalb keinen Fehler haben, der größer als die Messunsicherheit ist. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle schon die Messunsicherheit des Messsystems mit  $\pm 1$  dB angegeben [18], was einen Fehler von ungefähr  $\pm 12\%$  entspricht. Jedoch erscheint dieser Fehler relativ groß für die theoretischen Betrachtungen zu sein, sodass eine genauere numerische Berechnungen angestrebt wird. Deshalb wird angestrebt, den Fehler bezogen auf die analytischen Lösungen auf  $\pm 1\%$  zu beschränken.

---

## 2.5 Abschätzung zu den Vereinfachungen

---

Die bisherigen Betrachtungen haben die ideale und verlustfreie Wellenausbreitung ohne die Berücksichtigung äußerer Krafteinwirkungen beschrieben. In den folgenden zwei Abschnitten werden die Abschätzungen bezüglich der Dämpfung der Wellenausbreitung durch das Medium und die Auswirkungen von Nichtlinearitäten kurz erläutert. Auf die äußeren Krafteinwirkungen auf das Medium wird nicht weiter eingegangen, weil davon ausgegangen wird, dass diese äußerst klein sind. Zu den relevanten Krafteinwirkungen würden beispielsweise die Gravitationskraft, elektromagnetische Kräfte oder die Coriolis Kraft zählen [41], wobei die Gravitationskraft den größten Anteil ausmachen würde. Darüber hinaus wird weiterhin von einem homogenen Medium ausgegangen und es werden sowohl keine Materialübergänge als auch Veränderungen der stationären physikalischen Größen des Mediums in Ruhe untersucht. Es wird daher davon ausgegangen, dass nur die absorbierende Dämpfung durch das Medium und der Einfluss von Nichtlinearitäten einen Einfluss auf die lineare Wellenausbreitung haben und die übrigen Einflüsse dem gegenüber sehr gering sind.

---

### 2.5.1 Dämpfung des Schallfeldes durch das Medium

---

Die Schallwellen werden zum einen durch die Ausbreitung und zum anderen durch die Absorption des Mediums gedämpft [42]. Hierbei bestehen die Ausbreitungsverluste aus Reflexionen, Beugungen, Brechung und der kugelförmigen Abstrahlung der Schallwelle. In den vorherigen Betrachtungen wurde das bereits bei der Herleitung indirekt berücksichtigt. Daher wird in diesem Abschnitt ausschließlich die Dämpfung durch das Medium beschrieben. Zur Abschätzung des dämpfenden Einflusses auf die Schallausbreitung wird sich jedoch eine auf ebene Wellenausbreitung, anstatt der bisherigen kugelförmigen Schallausbreitung, beschränkt.

Bei der Dämpfung durch das Medium unterscheidet man grundsätzlich zwischen der klassischen und der molekularen Dämpfung. Die klassische Dämpfung setzt sich aus den Reibungsverlusten, den Wärmeleitungsverlusten, der Diffusion und den Strahlungsverlusten zusammen. Unter normalen Bedingungen haben jedoch näherungsweise nur die Reibungsverluste und die Wärmeleitungsverluste Auswirkungen auf die resultierende klassische Dämpfung [42]. Deshalb werden nur diese beiden Verlustarten bei der weiteren Betrachtung der klassischen Dämpfung berücksichtigt.

Die molekulare Dämpfung entsteht durch die Relaxation der Moleküle. Diese ist von der chemischen Zusammensetzung des Mediums abhängig. Aufgrund der Untersuchung der Schallwellenausbreitung von luftgekoppeltem Ultraschall sind für die molekulare Dämpfung hauptsächlich die Stickstoffmoleküle und die Sauerstoffmoleküle von Bedeutung. Unter der Annahme, dass die einzelnen Dämpfungen sich nicht gegenseitig beeinflussen, setzt sich die resultierende Dämpfung aus der klassischen Absorption und den zwei Absorptionen für die Relaxationen zusammen. Daher ergibt sich der resultierende Absorptionskoeffizient

$$\alpha = \alpha_{\text{th},v} + \alpha_{\text{O}_2} + \alpha_{\text{N}_2} \quad (2.49)$$

für das Medium Luft. Dabei ist  $\alpha$  der Absorptionskoeffizient,  $\alpha_{\text{th},v}$  die klassische Dämpfung,  $\alpha_{\text{O}_2}$  die Dämpfung durch die Relaxation durch den Sauerstoffanteil und  $\alpha_{\text{N}_2}$  die Dämpfung der Relaxation durch den Stickstoffanteil. Der Absorptionskoeffizient hat die Einheit  $\text{Np m}^{-1}$ . Durch die Annahme einer ebenen Welle wird der Schalldruck nach

$$\hat{p}(\vec{r}_p) = p(\vec{r}_p) e^{-\alpha z} e^{-jk_z z}. \quad (2.50)$$

gedämpft [29]. Anschließend erfolgt mit dieser die Berechnung des Schalldruckpegels. Um die Reduzierung des Schalldruckpegels durch die Dämpfung des Mediums zu berücksichtigen erfolgt die Umrechnung des Absorptionkoeffizienten in  $\text{dB m}^{-1}$ . Daher folgt für den gedämpften Schalldruckpegel

$$\hat{L}_p = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|p(\vec{r}_p)|}{p_{\text{ref}}} \right) - \alpha z. \quad (2.51)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass der Schalldruckpegel durch die Absorption des Mediums mit der Distanz zwischen der Quelle und dem Feldpunkt linear abnimmt. Abschließend muss noch der spezifische Absorptionskoeffizient von der Art des Mediums und dessen physikalischen Eigenschaften berechnet werden. Dieser ist im Wesentlichen von der Frequenz, dem stationären Druck, der Temperatur und der relativen Luftfeuchtigkeit abhängig. Unter Normalbedingung, bei der der stationäre Druck  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  und die Umgebungstemperatur  $T = 293,15 \text{ K}$  beträgt, kann der Absorptionskoeffizient nach

$$\alpha = f^2 \left( 1,84 \cdot 10^{-11} + \frac{6,16 \cdot 10^{-6}}{f_{r,\text{O}_2}^2 + f^2} f_{r,\text{O}_2} + \frac{1,16 \cdot 10^{-6}}{f_{r,\text{N}_2}^2 + f^2} f_{r,\text{N}_2} \right). \quad (2.52)$$

berechnet werden [43, 44]. Hierbei sind  $f_{r,\text{O}_2}$  und  $f_{r,\text{N}_2}$  die Frequenzen der Relaxation für den molekularen Sauerstoff und Stickstoff. Die Ermittlung dieser Frequenzen basiert auf experimentellen Untersuchungen. Aus den Messwerten konnten Gesetzmäßigkeiten abgeleitet und Näherungsformeln bestimmt werden [43, 44]. Es konnte gezeigt werden, dass die Frequenzen ebenfalls von dem stationären Druck, der Temperatur und der relativen Luftfeuchtigkeit abhängig sind. Die Frequenzen wurden unter Normalbedingungen für verschiedene relative Luftfeuchten nach den Gesetzmäßigkeiten aus [43] berechnet und sind in der Tabelle 2.1 zusammengefasst.

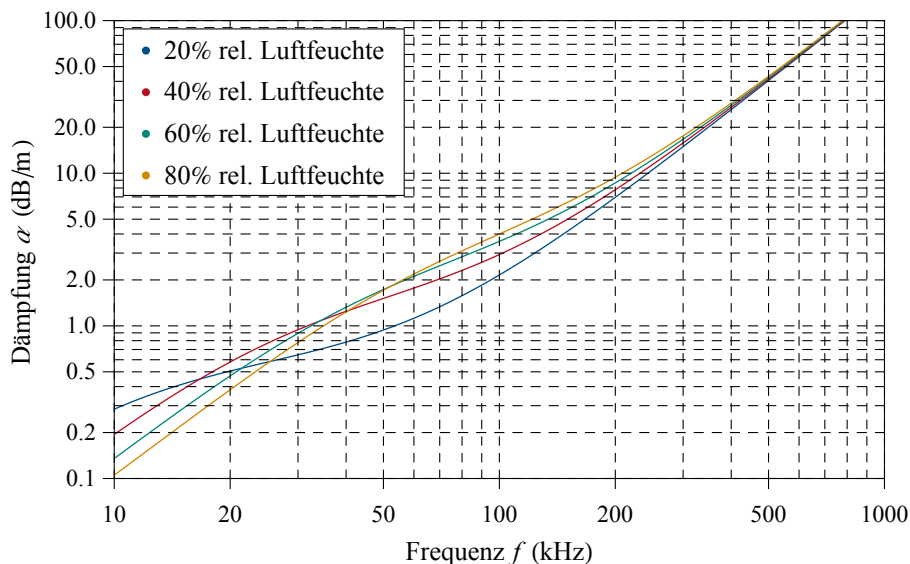
Mit den ermittelten Frequenzen von der Relaxation kann die Absorption durch das Medium in Abhängigkeit der Frequenz von dem ausgesendeten Schall berechnet werden. Anhand des Verlaufs von dem Absorptionskoeffizienten (Abbildung 2.6) wird ersichtlich, dass mit zunehmender Frequenz die Dämpfung bei gleicher Entfernung zwischen der Quelle und dem Feldpunkt zunimmt. Die relative Luftfeuchtigkeit hat hierbei einen wesentlichen Einfluss auf die Größe des Absorptionskoeffizienten. Eine höhere Luftfeuchtigkeit besitzt für Frequenzen ab 30 kHz eine größere Dämpfung. Aus diesem Grund sollte bei den Messungen zur Charakterisierung der Schallausbreitung von Ultraschallwandlern darauf geachtet werden, dass möglichst eine geringe Luftfeuchtigkeit vorliegt, damit dessen Vernachlässigung in den Simulationen bei der Validierung einen möglichst geringen Einfluss hat. Darüber hinaus wirkt sich auch



**Tabelle 2.1.:** Berechnung der Relaxationfrequenzen für den Stickstoff und den Sauerstoff in Abhängigkeit der relativen Luftfeuchtigkeit.

Relative Luftfeuchtigkeit (%)	$f_{r,O_2}$ (Hz)	$f_{r,N_2}$ (Hz)
20	10512	137,85
40	26688	266,71
60	44118	395,56
80	62029	529,42

die Entfernung zwischen der Quelle und dem Feldpunkt auf die Absorption durch das Medium aus. Zusammengefasst ist die resultierende Absorption umso größer, je höher die Frequenz, länger die Distanz und größer die relative Luftfeuchtigkeit ist.



**Abbildung 2.6.:** Schallabsorption durch das Medium Luft bei einem stationären Druck  $p_0 = 1 \text{ atm}$  und einer Umgebungstemperatur von  $T = 293.15 \text{ K}$  für verschiedene relative Luftfeuchten.

Für die Simulationen muss deshalb die Absorption für hochfrequente Schallabstrahlungen berücksichtigt werden. Auch für sehr große Distanzen ist es empfehlenswert, die Absorption in die Modellierungen mit einzubeziehen. Ein Schalldruck, welcher mit der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  angeregt wird, hat einen Absorptionskoeffizienten  $\alpha \approx 1,32 \text{ dB m}^{-1}$  bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 40%. Der Schalldruck würde sich bei einer Entfernung von  $z = 4,5 \text{ m}$ , im Vergleich zur Simulation ohne der Berücksichtigung der Absorption, halbieren. Dieser Unterschied ist signifikant und muss daher für die bessere Annäherung an die Realität in der Simulation berücksichtigt werden. Währenddessen reduziert sich bei einer kleineren Entfernung von  $z = 0,2 \text{ m}$  der Schalldruck um 3%. Hierbei ist eine Berücksichtigung der Dämpfung in der Berechnung nicht erforderlich, weil diese den Schalldruck nicht wesentlich verkleinert. Aus diesem Grund muss immer für den speziellen Anwendungsfall unterschieden werden, ob die Absorption erforderlich ist oder sie vernachlässigt werden kann.

## 2.5.2 Vorhandensein von Nichtlinearitäten

Nichtlinearitäten des Schallfeldes entstehen unter anderem durch die Schallerzeugung und die Schallausbreitung in einem Medium. Im Allgemeinen ist der nichtlineare Anteil durch die Schallerzeugung wesentlich größer, während die Schallausbreitung normalerweise linear ist [45]. Nichtlinearitäten, die durch das Medium entstehen, bilden sich erst bei sehr großen Schalldruckpegeln und weiten Entfernungen zur Schallquelle aus [37]. Hierbei verursachen die Nichtlinearitäten eine Aufsteilung des ursprünglichen sinusförmigen Schalldrucks. Diese entsteht durch die ortsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der sich die Schalldrücke der positiven Halbwelle schneller als die der negativen Halbwelle ausbreiten. Durch diese unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten bildet sich mit zunehmendem Abstand eine Wellenaufsteilung aus. In der veränderten Form des Schalldruckverlaufs befinden sich dann neben der harmonischen Frequenz auch Oberwellen. Diese haben je nach Amplitude einen Einfluss auf das resultierende Schallfeld. Jedoch wurde bereits im vorherigen Kapitel die Absorption durch das Medium erläutert. Hierbei zeigte sich, dass höhere Frequenzen wesentlich besser vom Medium absorbiert werden als niedrige. Dadurch kann geschlossen werden, dass die Oberwellen wesentlich besser durch das Medium absorbiert werden und der nichtlineare Anteil dadurch abgeschwächt wird. Darüber hinaus wirkt sich auch der Verlust durch die Schallausbreitung auf die Nichtlinearität aus. Hierbei wird die Amplitude des Schalldrucks mit zunehmendem radialen Abstand gedämpft und dadurch reduziert sich der Anteil der Nichtlinearitäten bezogen auf das resultierende Schallfeld.

Grundsätzlich sind jedoch immer Nichtlinearitäten im Schallfeld vorhanden und es muss daher abgeschätzt werden, ab welchem Schalldruck sie nicht mehr vernachlässigbar sind. In der Literatur gibt es keine eindeutige Grenze. Dennoch wird ein Bereich für den Schalldruckpegel von 130 dB [46] und 140 dB [37] angegeben, bis zu dem die nichtlinearen Effekte vernachlässigt werden können. Um eine genauere Abschätzung der angegebenen Schalldruckpegel auf die Euler'schen Gleichungen vornehmen zu können, werden die Differentialgleichungen skaliert und dabei die nichtlinearen Anteile gegenüber den linearen abgeschätzt. Die im Folgenden angegebene Herleitung der skalierten Differentialgleichungen basieren auf [47]. Dabei werden die skalierten Gleichungen für die Dichte und die Schnelle betrachtet. Dazu wird zunächst mithilfe der adiabatischen Gleichung (2.4) der Druck in die Dichte überführt. Für den Gradienten des Drucks folgt daher

$$\nabla p_g = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \left( \frac{\rho_g}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \nabla \rho_g. \quad (2.53)$$

Dieser Ausdruck wird in die nichtlineare Euler'sche Gleichung des Impulses (2.3) eingesetzt. Daher folgt

$$\rho_g \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_g (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + c_0^2 \left( \frac{\rho_g}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \nabla \rho_g = 0. \quad (2.54)$$

Nachdem die beiden Euler'schen Gleichungen nur noch von der Dichte und der Geschwindigkeit abhängen, werden die Größen und Operatoren skaliert. Hierbei ergeben sie sich zu

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L_{ch}}, y' = \frac{y}{L_{ch}}, z' = \frac{z}{L_{ch}}, t' = \frac{t}{T_{ch}}, \\ \vec{v}' &= \frac{\vec{v}}{v_{ch}} \text{ und } \rho' = \frac{\rho_g}{\rho_{ch}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die gestrichenen Größen sind die normierten Größen der charakteristischen Länge  $L_{ch}$ , charakteristischen Zeit  $T_{ch}$ , der charakteristischen Geschwindigkeit  $v_{ch}$  und der charakteristischen Dichte  $\rho_{ch}$ . Während davon ausgegangen wird, dass das Medium sich in Ruhe befindet und somit  $\vec{v}_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$  gilt, wird



die Gleichung für die skalierte Dichte angepasst. Dabei wird in diese die zusammengesetzte Dichte (2.1b) eingesetzt und für die veränderliche Dichte überführt. Daher folgt für diese

$$\rho = \rho_0 (1 + \rho_f \rho') \text{ mit } \rho_f = \frac{\rho_{ch}}{\rho_0}. \quad (2.56)$$

In dieser Gleichung ist  $\rho_f$  das Verhältnis aus der charakteristischen Dichte und der stationären Dichte des Mediums. Anhand der skalierten Größen (2.55) und der Gleichung (2.56) werden die Euler'schen Differentialgleichungen skaliert. Deshalb resultiert für die Kontinuitätsgleichung (2.2)

$$\frac{\rho_0 \rho_f}{T_{ch}} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\rho_0 v_{ch}}{L_{ch}} \nabla' \cdot ((1 + \rho_f \rho') \vec{v}') = 0 \quad (2.57)$$

und für die überführte Impulsgleichung mit dem Druck (2.54)

$$\frac{\rho_0 v_{ch}}{T_{ch}} (1 + \rho_f \rho') \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{\rho_0 v_{ch} v_{ch}}{L_{ch}} (1 + \rho_f \rho') (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' + c_0^2 \frac{\rho_0}{L_{ch}} \rho_f (1 + \rho_f \rho')^{\kappa-1} \nabla' \rho' = 0. \quad (2.58)$$

Zur weiteren Betrachtung wird die akustische Machzahl eingeführt. Diese entspricht dem Verhältnis der charakteristischen Geschwindigkeit und der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium. Darüber hinaus wird auch die charakteristische Zeit festgelegt, die sich aus dem Verhältnis der charakteristischen Länge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit zusammensetzt. Daher werden die Größen mit

$$Ma = \frac{v_{ch}}{c_0} \text{ und } T_{ch} = \frac{L_{ch}}{c_0} \quad (2.59)$$

definiert. Anschließend können diese in die Gleichungen (2.57) und (2.58) eingesetzt werden. Daher folgt für die skalierte Kontinuitätsgleichung

$$\rho_f \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + Ma \nabla' \cdot ((1 + \rho_f \rho') \vec{v}') = 0 \quad (2.60)$$

und für die skalierte Massengleichung ergibt sich

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + Ma (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' + Ma^{-1} \rho_f (1 + \rho_f \rho')^{\kappa-2} \nabla' \rho' = 0. \quad (2.61)$$

Unter der Annahme, dass

$$Ma \approx \rho_f \quad (2.62)$$

gilt oder zumindest in der selben Größenordnung liegt, kann damit eine Abschätzung für die Euler'schen Differentialgleichungen durchgeführt werden. Dazu wird  $\rho_f$  mit  $Ma$  in den Gleichungen (2.60) und (2.61) ersetzt. Deshalb gehen die beiden Gleichungen in

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot ((1 + Ma \rho') \vec{v}') = 0 \quad (2.63)$$

und

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + Ma (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' + (1 + Ma \rho')^{\kappa-2} \nabla' \rho' = 0 \quad (2.64)$$

---

über. Aus diesen zwei Gleichungen geht hervor, dass nur die nichtlinearen Terme der skalierten Euler'schen Gleichungen von der akustischen Machzahl abhängen. Die linearen Anteile dieser Gleichungen sind hingegen unabhängig von dieser Kennzahl. Im idealen Fall ist die Machzahl  $Ma = 0$  und die Euler'schen Gleichungen linear. Jedoch ist dieses nicht möglich, weil für diesen Fall keine Schallschnelle vorliegen würde und somit kein Schallfeld existiert. Aus diesem Grund sind die Euler'schen Gleichungen immer nichtlinear. Hierbei kann jedoch angenommen werden, wenn die Machzahl  $Ma \rightarrow 0$  gilt, dass der nichtlineare Teil zu vernachlässigen ist.

Anhand der zwei gezeigten Grenzen des Schalldruckpegels wurden die akustischen Machzahlen berechnet und dadurch ist eine Abschätzung des nichtlinearen Verhaltens durchgeführt worden. Zur Berechnung der Machzahl werden sowohl die stationäre Dichte des Mediums als auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit benötigt. Diese wurden für das Medium Luft mit  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$  und  $c_0 = 343,3 \text{ m s}^{-1}$  angenommen. Die charakteristische Geschwindigkeit ist als maximal auftretende Schallschnelle gewählt worden. Dabei wurde sie aus dem Schalldruckpegel und der spezifischen akustischen Impedanz berechnet. Es folgt daher für den Schalldruckpegel  $L_p = 130 \text{ dB}$  eine Machzahl  $Ma = 5,28 \cdot 10^{-4}$  und für  $L_p = 140 \text{ dB}$   $Ma = 1,67 \cdot 10^{-3}$ . Aufgrund dieser kleinen Machzahlen kann daher von einer linearen Wellenausbreitung im Medium ausgegangen werden.

---

### 3 Schallabstrahlung von ebenen Ultraschallwandlern

---

In diesem Kapitel wird die Schallabstrahlung von Ultraschallwandlern modelliert und simuliert. Dazu werden zunächst die Ultraschallwandler analysiert und es werden Randbedingungen für die Modelle definiert. Das grundsätzliche Modell, welches auf dem Rayleigh Integral basiert, wird in frei erhältlichen und kommerziellen Programmen umgesetzt. Hierbei werden unterschiedliche numerische Methoden zur Simulation des Schallfeldes verwendet. Die Simulationsergebnisse werden hinsichtlich der analytischen Lösungen (Kapitel 2.4.2) untersucht und entsprechend ihres Fehlers bewertet. Neben der Genauigkeit wird auch der Rechenaufwand untersucht. Aufgrund von Einschränkungen der Simulationen werden eigene Modelle in Mathematica (Wolfram Research Inc., Champaign, IL, USA) implementiert und mit diesen das Schallfeld simuliert. Dabei wird zunächst auf die standardmäßig zur Verfügung stehenden numerischen Integrationsmethoden von Mathematica zurückgegriffen. Auch die numerischen Integrationsmethoden werden bezüglich ihrer Genauigkeit zu den analytischen Lösungen untersucht und es erfolgt eine Auswertung der benötigten Rechenzeit. Die Simulationen mit den Programmen und den standardmäßigen Integrationsverfahren können nur über die zentralen Prozessoreinheit (CPU) des Computers durchgeführt werden. Um eine möglichst schnelle Berechnung und den Anforderungen entsprechende Genauigkeit des simulierten Schallfeldes zu erreichen, wird ein paralleler Programmcode für die Grafikprozessoreinheit (GPU) entwickelt. Dazu wird das Rayleigh Integral (2.38) in eine diskrete Form überführt und mit dieser die Schallfeldsimulation durchgeführt. Darauf aufbauend, wird ein besser der Realität angepasstes Modell entwickelt, welches auf dem KHI (2.26) beruht. Anhand der zwei grundsätzlichen Modelle werden die unterschiedlichen Simulationsergebnisse aufgezeigt und deren Ursache physikalisch begründet. Abschließend werden alle Modelle miteinander verglichen und es werden die Stärken und Schwächen der jeweiligen Berechnungsverfahren herausgestellt.

---

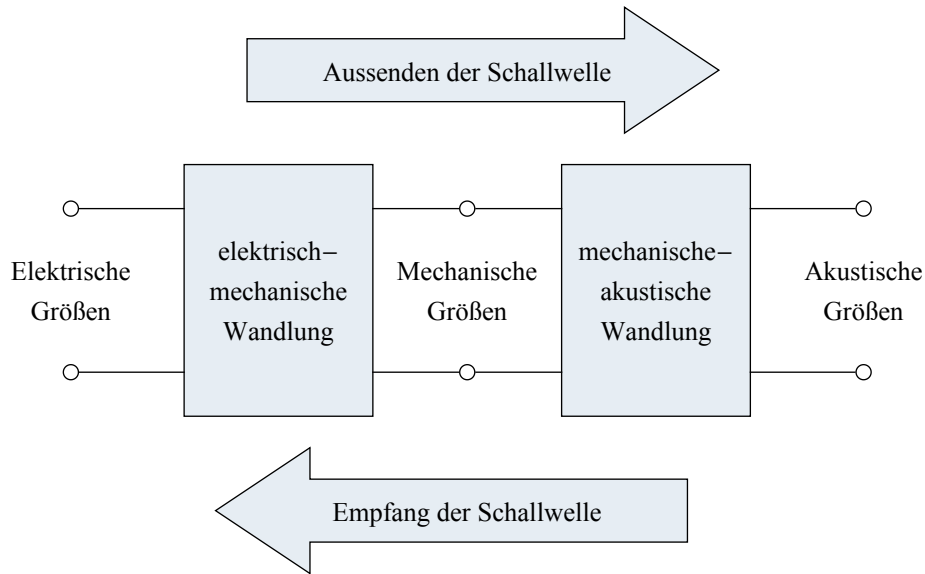
#### 3.1 Modellbildung zur Schallabstrahlung von Ultraschallwandlern

---

Die Modellierung von gesamten akustischen Systemen bedarf einer Vielzahl gekoppelter physikalischer Gesetzmäßigkeiten. Dabei besteht das akustische System aus einer Schallerzeugung, der Umwandlung in eine akustische Größe und der anschließenden Schallwellenausbreitung. Hierfür gibt es viele physikalische Vorgänge, mit denen die Schallwellen erzeugt werden können. Dazu zählen unter anderem thermische, optische oder mechanische Umwandlungsprozesse [48]. In dieser Arbeit werden jedoch ausschließlich elektromechanische Ultraschallwandler verwendet. Für diese Art des Ultraschallwandlers und der Schallwellenausbreitung, kann ein gekoppeltes System mit zwei Umwandlungen der physikalischen Größen (Abbildung 3.1) entwickelt werden.

Bei elektromechanischen Wandlern erfolgt die Erregung mit elektrischen Signalen, die anschließend in mechanische Größen umgewandelt werden. Diese Wandlung kann beispielsweise mit Piezokeramiken oder Kapazitäten erreicht werden [3]. Die angelegten elektrischen Größen verursachen eine mechanische Bewegung, welche durch einen weiteren Umwandlungsprozess in eine akustische Größe überführt wird. Diese akustische Größe kann anschließend durch akustische Leitungen geführt werden oder direkt in das freie Feld abgegeben werden. Abschließend ist noch anzumerken, dass die meisten akustischen Systeme reversibel verlaufen, sodass sowohl die Aussendung der Schallwelle als auch der Empfang des Schalls über die selben Wandlungsprozesse nur in umgekehrter Reihenfolge erfolgen [3].

In dieser Arbeit werden nicht die Umwandlungsprozesse der elektrischen Größe zu akustischen Größen modelliert und simuliert, sondern es wird die Ausbreitung der Schallwelle in ein Volumen untersucht. Die Erregung des akustischen Wandlers entspricht dabei den Randbedingungen des Modells. Daher kann eine passende Simulation nur durchgeführt werden, wenn die Randbedingungen möglichst dem realen Ultraschallwandler entsprechen. Aufgrund der unbekannten Umwandlungsprozesse der Ultraschallwandler,



**Abbildung 3.1.:** Wandlungsprinzipien elektroakustischer Wandler für das Aussenden und Empfangen von Schallwellen [3].

soll die Modellentwicklung flexible Randbedingungen zulassen, sodass sowohl unterschiedliche Frequenzen, Amplituden und Phasenlagen auf dem Rand des akustischen Modells vorgegeben werden können. Durch die Flexibilität des Systems ist es dann auch möglich, beliebige Verteilungen der Schallschnelle auf der Oberfläche zu integrieren. Dabei ist es unerheblich, ob die Schnelle über messtechnische Verfahren, wie beispielsweise mithilfe eines Laservibrometers, erfasst oder durch andere physikalische Modelle ermittelt wird. In den weiteren Betrachtungen wird jedoch die Schallschnelle auf der Kolbenoberfläche bzw. den Austrittsöffnungen des Schalls mit  $v_n = 1 \text{ m s}^{-1}$  angenommen.

Die Modellbildung basiert auf den physikalischen Grundlagen der linearen Akustik, welche in Kapiteln 2.2, 2.3 und 2.4 erläutert wurde. Dabei werden zwei wesentliche Modelle erstellt, die zum einen auf dem Rayleigh Integral und zum anderen auf dem KHI beruhen. Die eben erwähnten Randbedingungen sind für die Simulation des Schallfeldes mit diesen Modellen essentiell und werden unter den erläuterten Bedingungen in das Modell integriert. Darüber hinaus soll mit dem Modell das Schallfeld in einem großen dreidimensionalen Raum möglich sein. Die ausgesendeten Schallwellen werden im Ultraschallbereich erfolgen und erfordern damit eine hohe räumliche Auflösung, damit die Simulationsergebnisse konvergieren. Dadurch können eindeutige Analysen der charakteristischen Schallwellenausbreitung der Ultraschallwandler durchgeführt werden. Anhand der Modelle sollen mit den Simulationen Vorhersagen getroffen werden, wie sich das Schallfeld für den verwendeten Ultraschallwandler ausbildet.

### 3.2 Programme zur Schallfeldberechnung

Die Simulation von Schallfeldern kann mit einer Vielzahl von Programmen und Programmpaketen, welche beispielsweise in MATLAB (The Mathworks, Inc., Natick, Massachusetts, USA) durchgeführt werden, erfolgen. Dabei unterscheiden sich diese im Wesentlichen durch ihr numerisches Verfahren und den möglichen Funktionsumfang, mit dem sie physikalische Phänomene abbilden. Die meisten implementierten Varianten zur Simulation der Schallabstrahlung basieren auf den Methoden der BEM oder der FDTD. Aber es wird auch die FEM, gerade bei gekoppelten Systemen oder für die Simulation komplexer Geometrien, häufig eingesetzt. Ebenfalls werden sonst nicht so gebräuchliche Verfahren wie die Methode der räumlichen Impulsantwort oder der Methode für Wellenspektren bei der Schallausbreitung eingesetzt. Aufgrund der sehr großen Anzahl von vorhandenen Programmen und Methoden, ist es nicht möglich

---

jedes zu untersuchen und hinsichtlich der Vor- und Nachteile zu bewerten. Dennoch werden einzelne Programme der verschiedenen numerischen Methoden ausgewählt und miteinander verglichen. Es wird davon ausgegangen, dass Simulationsprogramme, die auf den selben Methoden beruhen, sich ähnlich verhalten und nur geringfügige Unterschiede hinsichtlich der Genauigkeit und des Rechenaufwands besitzen.

Das Programm COMSOL Multiphysics (COMSOL Inc., Burlington, Massachusetts, USA) mit dem Module Acoustics basiert in der ursprünglichen Variante auf der FEM. Seit der Version 5.3a (veröffentlicht am 14. Dezember 2017) können zusätzlich auch die akustische Felder mit der BEM simuliert werden. Diese Version stand erst gegen Ende dieser Arbeit zur Verfügung, sodass die wesentliche Modellentwicklung auf der FEM basiert. Jedoch wurden trotzdem einzelne Modelle auf der Grundlage der BEM entwickelt und die Simulationsergebnisse analysiert und mit dem eigenen entwickelten Modell in Mathematica verglichen. Darüber hinaus können mit COMSOL verschiedene physikalische Phänomene miteinander gekoppelt werden, wodurch sich eine Vielzahl von Anwendungen als gesamtes Modell simulieren lassen. Die Toolbox kwave für MATLAB ist ein Programm, mit dem eine Vielzahl akustischer Phänomene simuliert werden können [49]. Dazu gehören unter anderem die Heterogenität des Mediums, die nichtlineare Wellenausbreitung oder thermische Diffusion. Das Simulationsprogramm basiert auf der FDTD, bei der die Simulation der Wellenausbreitung im Zeitbereich erfolgt. Aufgrund des relativ großen dreidimensionalen Volumens wird eine hohe Knotenanzahl für die konvergierten Simulationsergebnisse benötigt. Hinzu kommt eine hohe zeitliche Auflösung und die Dauer des aufgenommenen Schalldrucks, bis sich der eingeschwungene Zustand einstellt. Dadurch werden sehr viele Zeitschritte benötigt. Aus diesen Gründen werden die Simulationen sehr speicherintensiv und zeitaufwendig. Dieser Nachteil der FDTD gegenüber anderen Methoden wurde auch im Rahmen eines Workshops [12] bestätigt. Es wurde dabei eine Abschätzung zum benötigten Speicherbedarf gegeben. Der benötigte Speicher für die Schallausbreitung in einem Kubikmeter Luft bei einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  und 10 Knoten pro Wellenlänge würde ungefähr 118 GB betragen. Darüber hinaus ist die zeitliche Auflösung ungefähr fünfmal größer als die räumliche Auflösung. Anhand der benötigten Zeit, bis sich der eingeschwungene Zustand einstellt, müssen sehr viele Zeitschritte simuliert werden. Anschließend kann dann mithilfe einer Fourier Transformation (FFT) das zeitlich abhängige Signal in den Frequenzbereich überführt werden. Für die hohe Anzahl der benötigten Zeitschritte würde sich ebenfalls ein sehr großer Speicherbedarf ergeben. Aufgrund des hohen Ressourcenaufwands bei der FDTD für die Simulation von dreidimensionalen Schallfeldern, wird diese Methode im Weiteren nicht weiter verfolgt.

In der Simulation von Ultraschallwellen hat sich das Programm Field II [24, 25], welches auf der Methode der räumlichen Impulsantwort basiert, etabliert. Das grundsätzliche Konzept der räumlichen Impulsantwort für die Schallausbreitung wurde von Tupholme und Stepanishen entwickelt. Anhand dieser Methode ist es möglich, den Schalldruck für dreidimensionale Gebiete aber auch von einzelnen Punkten effizient zu simulieren. Der große Vorteil bei dieser Herangehensweise ist, dass das Gebiet nicht im gesamten Raum diskretisiert werden muss. Dadurch können auch Simulationen von weit entfernten Raumpunkten mit einer kurzen Rechenzeit durchgeführt werden. Mit Field II sind Simulationen sowohl für impulsförmige als auch kontinuierliche Erregungen beliebiger Geometrien möglich. Durch die Diskretisierung in kleinen Quadraten der erregenden Ultraschallwandler lässt sich auch eine Apodisation umsetzen. Diese Apodisation ermöglicht es, die Verteilung der Schallschnelle auf der Oberfläche durchzuführen. Darüber hinaus sind eine Vielzahl von räumlichen Formen von einzelnen Wandlern und Gruppenwandlern verfügbar. Hierbei können sowohl ebene als auch konvex geformte Wandler verwendet werden. Insbesondere konvex geformte Ultraschall Gruppenwandler werden in der Medizintechnik häufig verwendet, wodurch Field II oft in der Medizintechnik [1] verwendet wird. Des Weiteren ist auch die Berücksichtigung der Dämpfung durch das Medium und die Simulation von Streuungen an Objekten möglich. Jedoch können mit Field II keine nichtlinearen Erscheinungen simuliert werden. Ein weiterer Nachteil ist die aufwendige Abtastung der Signale. Durch diese Abtastung kann ein sehr hoher zeitlicher Rechenaufwand entstehen. Der Rechenaufwand könnte durch den Einsatz von mehreren Recheneinheiten reduziert werden, jedoch ist dieses in der verfügbaren Version leider nicht möglich.

---

Um einen adäquaten Vergleich bezüglich der Genauigkeit als auch der Rechenzeit zu gewährleisten, wurden alle Programme und Programmpakete sowie die eigenen entwickelten Programmcodes auf dem selben Computer betrieben. Dieser Computer ist grundlegend mit einem vier Kerne Hauptprozessor (i7-6700K der Firma Intel), 32GB DDR4-Arbeitsspeicher (4x8GB 2133MHz der Firma Crucial) und einer Grafikkarte (GTX 760 der Firma NVIDIA) ausgestattet. Das verwendete Betriebssystem ist Microsoft Windows 7 Professional in der 64 Bit Variante. Eine Ausnahme bildet jedoch das BEM Modell in COMSOL, bei der die Simulation auf einem anderen Computer ausgeführt werden musste. Im Gegensatz zum ersten Computer ist dieser wesentlich leistungstärker. Er besitzt zwei zehn Kerne Hauptprozessoren (E5-2660v3 der Firma Intel) und einen 256GB DDR4-Arbeitsspeicher (8x32GB 2133MHz der Firma Hynix). Als Betriebssystem wird Microsoft Windows Server 2012 R2 Standard in der 64 Bit Variante verwendet.

In den folgenden zwei Abschnitten werden in den Programmen COMSOL und Field II Modelle erstellt und mit diesen die Schallabstrahlung von den kreisförmigen Kolbenstrahlern simuliert. Dabei wird einheitlich der selbe Ultraschallwandler mit einem Radius von 6,4 mm in einer schallharten Wand bei einer Frequenz von 40 kHz betrieben. Dieser entspricht dem zur Verfügung stehenden Ultraschallwandler MA40B8S der Firma Murata, welcher im späteren Verlauf auch messtechnisch erfasst (Kapitel 4.7) wird. Jedoch werden in diesem Kapitel zunächst die Modelle theoretisch untersucht und mit analytischen Lösungen (Kapitel 2.4.2) verglichen. Dadurch soll die Genauigkeit der einzelnen Programme erfasst und die Konvergenz der jeweiligen numerischen Verfahren gewährleistet werden.

---

### 3.2.1 COMSOL

---

COMSOL ist ein Programm, mit dem mehrere physikalisch gekoppelte Phänomene untersucht werden können. Im Allgemeinen setzt sich die Software aus dem Hauptprogramm und Modulen, welche Erweiterungsmöglichkeiten bieten, zusammen. In dieser Arbeit wurde das Programm COMSOL Multiphysics® der Version 5.2a [22] mit den Modulen Acoustics und Structural Mechanics verwendet. Mit Hilfe dieser Zusammenstellung kann zum einen die Schallabstrahlung, aber auch das Verhalten des Ultraschallwandlers simuliert werden. Jedoch wird zum Vergleich nur das Schallfeld mit den zuvor beschriebenen Randbedingungen simuliert. Mit der hier verwendeten Version 5.2a ist nur eine FEM Modellierung möglich. In der darauffolgenden Version wurde eine Randelemente Methode (BEM) in dem Acoustic Modul integriert. Diese Methode wurde gegen Ende dieser Arbeit noch zum Vergleich (Kapitel 3.5.2 und 5.3) mit einbezogen. Dennoch wird sich dieser Abschnitt nur mit der FEM Modellierung befassen und die Modellierung mit der BEM wird an den geeigneten Stellen hinzugezogen.

Der Aufbau eines Modells in COMSOL erfolgt in mehreren Schritten, welche im Folgenden kurz erläutert werden. Zunächst werden die räumliche Dimension und die zu untersuchenden physikalischen Erscheinungen ausgewählt. Hierbei stehen in COMSOL unter anderem dreidimensionale, rotationssymmetrische oder zweidimensionale Koordinatensysteme zur Auswahl. Die physikalischen Erscheinungen umfassen sowohl die verschiedenen Teildisziplinen als auch verschiedene Methoden zum Lösen des Problems. Nachdem die grundsätzlichen Eigenschaften des Modells festgelegt wurden, erfolgt die Generierung des geometrischen Modells. Neben den reinen geometrischen Abmaßen werden den einzelnen Bereichen des Modells Materialien, welche wichtige spezifische Eigenschaften beinhalten, zugewiesen. Anschließend erfolgt die physikalische Beschreibung der Problemstellung. Es wird zum einen festgelegt, in welchen Bereichen des Modells die jeweiligen physikalischen Gesetzmäßigkeiten vorliegen und zum anderen werden die Randbedingungen und Initialbedingungen festgelegt. Dabei gibt es eine Besonderheit, weil die FEM eigentlich abgeschlossene Gebiete benötigt, werden in COMSOL für unendlich ausgedehnte Volumen perfekt angepasste Grenzschichten (PML) verwendet. Diese Grenzschichten des Modells sind eigentlich nicht Bestandteil des Simulationsgebiets, sondern werden vielmehr dazu verwendet, Wellen oder andere sich über das zu simulierende Gebiet hinaus ausbreitende Phänomene zu dämpfen. Anhand dieser Dämpfung soll eine Rückwirkung auf das Simulationsgebiet, welche durch eine Reflexion am äußeren Rand des Modells entsteht, vermieden werden. Im nächsten Schritt wird das

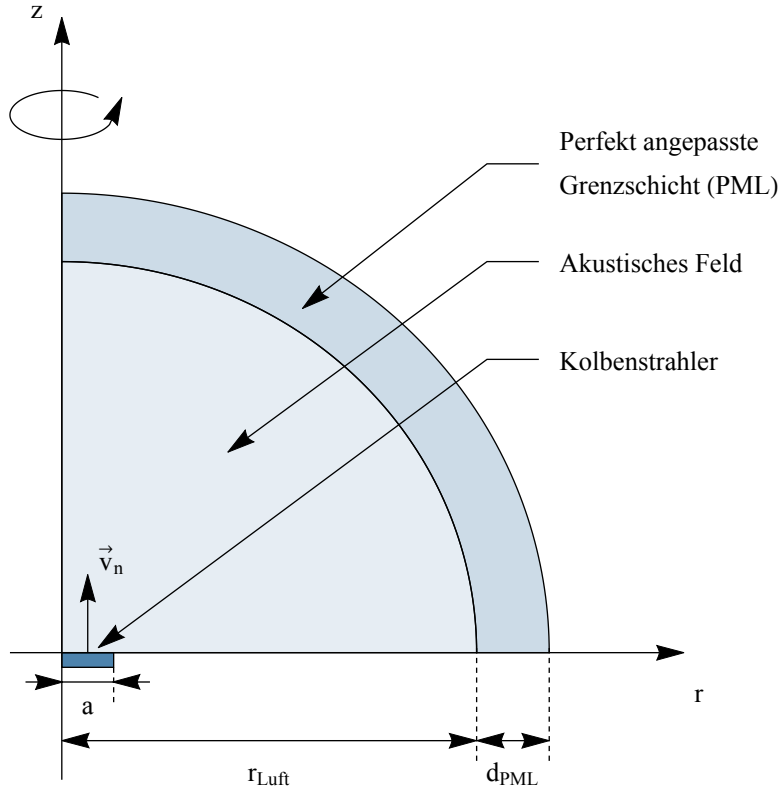


---

Simulationsgebiet entsprechend der räumlichen Dimension diskretisiert. Es stehen hierfür sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Elemente zur Verfügung. Die geometrische Form der Diskretisierung kann für zweidimensionale Problemstellungen dreieckig oder viereckig sein. Bei dreidimensionalen Körpern erfolgt die Diskretisierung mit Tetraeder. Diese Elemente können des Weiteren linear, quadratisch oder höherer Ordnung sein. Die Elementanzahl und die Ordnung bilden den Freiheitsgrad des Modells und diese haben einen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit des simulierten Problems. Dieses ist zum einen durch die Approximation der Geometrie als auch durch die Anzahl der Stützstellen für die Lösung begründet. Aus diesem Grund sollte immer eine Konvergenzanalyse bezüglich des Gitters und der Ordnung der Elemente durchgeführt werden. Als letzten Schritt wird der Gleichungslöser zum Lösen des entstehenden Gleichungssystems ausgewählt. In COMSOL existieren dafür sowohl direkte als auch iterative Löser, welche in beiden Fällen viele verschiedene Methoden beinhalten. Während der direkte Löser keine weitere Konvergenzuntersuchung benötigt, muss bei der iterativen Lösung immer eine weitere Konvergenzuntersuchung durchgeführt werden. Des Weiteren weisen die direkten Löser eine deutlich höhere Genauigkeit auf als die iterativen und sind dabei nicht so zeitintensiv. Dafür sind die direkten Lösungsverfahren aber sehr viel speicherintensiver. Allerdings ist die Simulation mit direkten Lösungsverfahren bei einer hohen Anzahl von Freiheitsgraden nicht mehr möglich und es kommen nur noch iterative Verfahren in Betracht. Nachdem diese Schritte durchgeführt wurden, kann die Simulation erfolgen und es wird das Gleichungssystem gelöst. Abschließend werden die simulierten Felder graphisch dargestellt und es kann deren Auswertung erfolgen.

Im Folgenden wird die Simulation der Schallwellenausbreitung von ebenen Ultraschallwandlern in COMSOL beschrieben. Zunächst wurde ein dreidimensionales Modell für die Schallausbreitung mit kreisförmigen Ultraschallwandlern entwickelt. Jedoch konnte eine Simulation, selbst mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden des Systems und der Verwendung von iterativen Lösern, nicht durchgeführt werden. Dabei wurden sowohl die Anzahl der Knoten pro Wellenlänge als auch das zu berechnende Gebiet deutlich reduziert. Das hauptsächliche Problem ist der sehr hohe Speicherbedarf für die Erzeugung und Lösung des entstandenen Gleichungssystems durch die große Anzahl von Freiheitsgraden. Erst bei sehr kleinen Gebieten, wie beispielsweise einem Würfel mit der Seitenlänge von 8 cm, konnte eine Simulation mit konvergierten Ergebnissen erreicht werden. Weil dieses Volumen aber deutlich zu klein ist, erfolgte die Reduzierung der Dimension des Raumes. Hierbei wurde das dreidimensionale Modell in ein rotationssymmetrisches Modell überführt. Es ist auch möglich Spiegelungsebenen in dem dreidimensionalen Modell einzuführen, jedoch ist die Ergiebigkeit bezüglich der Reduzierung der Elemente nicht so groß wie bei der Reduzierung der Dimension. Auf Basis der Rotationssymmetrie wurden zwei Modelle entwickelt. Hierbei ist das erste Modell zylinderförmig und das zweite Modell besitzt die Form einer Halbkugel (Abbildung 3.2).

Der Aufbau der beiden Modelle ist sehr ähnlich, sodass sich im Folgenden auf die Beschreibung des Modellaufbaus für die Halbkugel beschränkt wird. Analog dazu wurde das zylinderförmige Modell entwickelt, nur dass hierfür die Geometrie und die PML an dieses System angepasst wurden. Im Allgemeinen ist die  $z$ -Achse die Rotationsachse und das Modell wird vom Koordinatenursprung aus aufgebaut. In der Ebene  $z = 0$  befindet sich die schallharte Wand und der kreisförmige Ultraschallwandler mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$ . Um diese Ebene erstreckt sich eine Halbkugel mit dem Radius  $r_{\text{Luft}} = 500 \text{ mm}$ , welche mit einer Absorptionsschicht mit der Dicke  $d_{\text{PML}} = 34,3 \text{ mm}$  umgeben ist. Diese Dicke entspricht ungefähr der vierfachen Wellenlänge. An dieser Stelle sei angemerkt, dass bei dem zylinderförmigen Modell die Höhe und der Radius jeweils dem Radius der Halbkugel  $r_{\text{Luft}}$  entsprechen. Ansonsten sind alle geometrischen Abmessungen genauso gewählt wie bei dem Modell der Halbkugel. Nachdem das geometrische Modell erstellt wurde, wird diesem das Material Luft, welches standardmäßig in COMSOL verfügbar ist, zugewiesen. Dadurch sind die relevanten akustischen Materialeigenschaften Dichte des Mediums und die Ausbreitungsgeschwindigkeit verfügbar. Die exakten Werte werden über den stationären Druck  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  und die Umgebungstemperatur  $T = 293,15 \text{ K}$  nach den folgenden Gleichungen berech-



**Abbildung 3.2.:** Aufbau eines rotationssymmetrischen COMSOL Modells (FEM) zur Berechnung des Schallfelds von kreisförmigen Ultraschallwandlern in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand.

net. Diese sind in dem Programm hinterlegt und werden mit den vorgegebenen Werten des stationären Drucks und der Temperatur berechnet. Damit ergibt sich für die stationäre Dichte

$$\rho_0 = \frac{0,02897 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} \frac{101325 \text{ Pa}}{293,15 \text{ K}} \approx 1,204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (3.1)$$

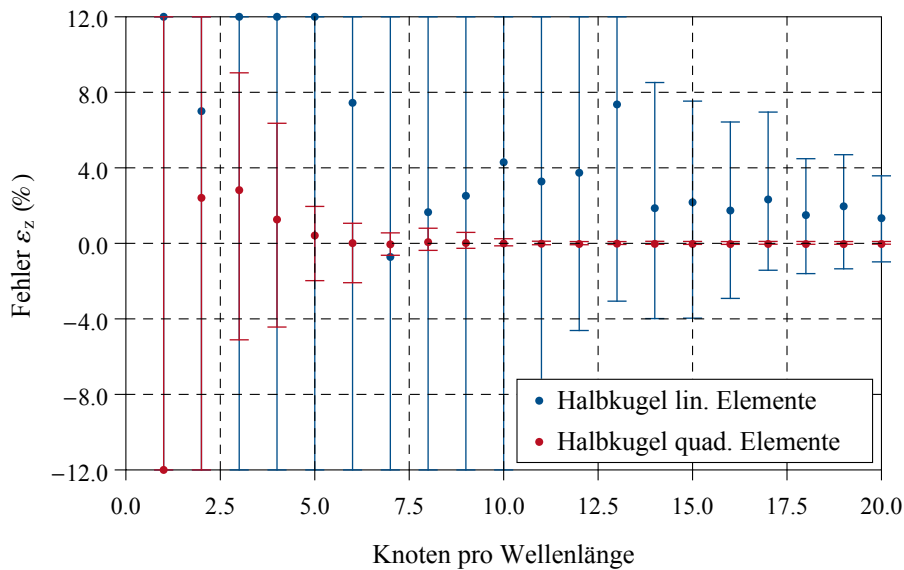
und für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c_0 = \sqrt{1,4 \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 293,15 \text{ K}} \approx 343,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.2)$$

Nachdem das geometrische Modell und die Zuweisung des Materials erstellt wurde, werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten dem Modell zugeordnet. Dazu wird zunächst dem gesamten Volumen, einschließlich der angepassten Grenzschrift, die Helmholtz Gleichung zugewiesen. Auf der gesamten Außenfläche wird die akustische Schnelle mit  $v_n = 0 \text{ m s}^{-1}$  vorgegeben. Eine Ausnahme hiervon bildet die Oberfläche des Ultraschallwandlers, auf der die Schnelle  $v_n = 1 \text{ m s}^{-1}$  gilt. Die Festlegung der PML ist von besonderer Bedeutung, da durch sie das unendlich ausgedehnte Medium abgebildet wird. Diese PML ist in sphärischen Koordinaten mit dem Zentrum im Koordinatenursprung und einer polynomischen Dämpfung definiert. Im Anschluss erfolgt die Diskretisierung des Volumens und der Grenzschrift. Hierbei wird für das Volumen der Halbkugel ein unstrukturiertes Gitter mit Dreiecken verwendet. Hingegen wird bei der PML ein strukturiertes Gitter verwendet. Aufgrund der Verwendung des direkten Löser MUMPS bedarf es nur einer Konvergenzanalyse des Gitters. Die Simulationsergebnisse hängen daher



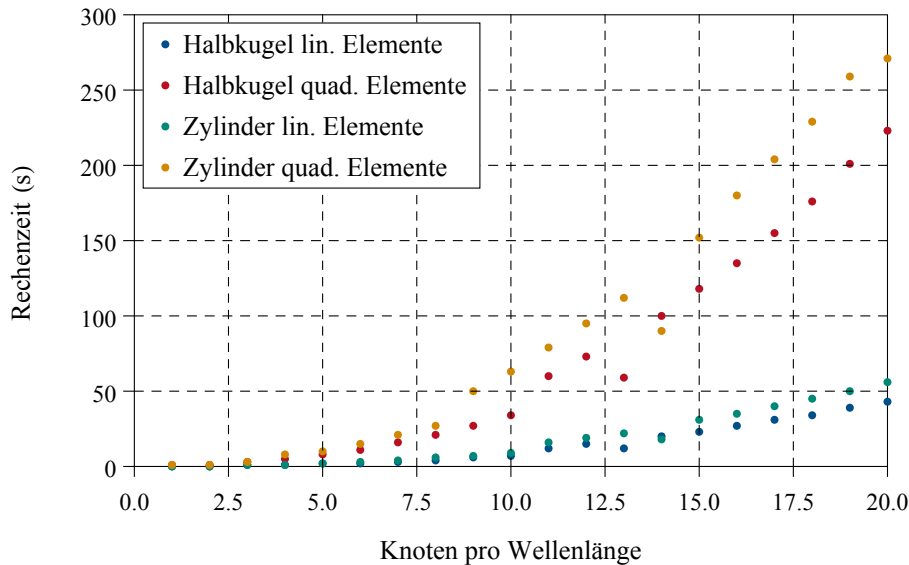
nur von der Ordnung und der Anzahl beziehungsweise der resultierenden Größe der triangulierten Elemente ab. Diese werden hinsichtlich des Fehlers bezogen auf die analytische Lösung der Hauptachse und des Fernfeldes (Kapitel 2.4.2) untersucht und damit eine Abschätzung getroffen, wann die Lösung konvergiert ist.



**Abbildung 3.3.:** Fehleranalyse für das halbkugelförmige COMSOL Modell bezogen auf die analytische Lösung des Schalldrucks auf der Hauptachse nach der Gleichung (2.47). Das Schallfeld wird durch einen Ultraschallwandler mit dem Radius  $a = 6,4\text{ mm}$  und der Erregungsfrequenz  $f = 40\text{ kHz}$  verursacht.

In der Abbildung 3.3 wird der Fehler der numerischen Lösung des halbkugelförmigen Modells bezogen auf die analytische Lösung des Kolbenstrahlers entlang der Hauptachse nach der Gleichung (2.42) dargestellt. Es wurden zur Fehleranalyse lineare und quadratische Dreiecke mit verschiedenen Größen verwendet. Die unterschiedlichen Größen werden in Knoten pro Wellenlänge angegeben und bedeuten, dass eine größere Anzahl von Knoten ein feineres Gitter besitzen. Aufgrund der globalen Gittererzeugung kann die exakte Größe der einzelnen Elemente etwas variieren. Es wurde festgelegt, dass die maximale Größe exakt den Knoten pro Wellenlänge entspricht und die minimale Größe 20% kleiner sein kann. Die Fehlerbalken beinhalten 1001 Feldpunkte, welche im Abstand von 0,5 mm entlang der Hauptachse numerisch und analytisch berechnet wurden. Hierbei stellt der obere Strich die größtmögliche Abweichung und der untere Strich die kleinstmögliche Abweichung dar. Der Punkt kennzeichnet den mittleren Fehler zwischen den zwei Lösungen. Aus der Darstellung werden zwei wesentliche Eigenschaften deutlich. Zum einen ist der Fehler bei einer höheren Ordnung der Elemente sehr viel kleiner und konvergiert mit zunehmender Anzahl der Knoten pro Wellenlänge. Darüber hinaus werden die Fehler bei feiner werdendem Gitter immer genauer. Des Weiteren wurde die Verifikation des Modells anhand des Fernfeldes vorgenommen. Dabei konnte keine der zuvor verwendeten Diskretisierungen und Ordnungen der Elemente das Schallfeld hinreichend genau abbilden. Das resultiert aus den Nulldurchgängen, die bei der analytischen Lösung auftreten. An diesen Stellen und deren Umgebung wird die numerische Lösung nicht klein genug und deshalb wird der ermittelte Fehler sehr groß. Aus diesem Grund kann eine Konvergenzanalyse für diese Simulation bezüglich der Fernfeldapproximation nicht durchgeführt werden. Die Betrachtung der Lösungen auf der Hauptachse zeigt, dass nur die Simulationen mit den quadratischen Elementen ab sieben Knoten pro Wellenlänge den angestrebten Fehler  $\varepsilon_z \leq 1\%$  erreichen.

Jedoch ergeben sich auch erhebliche Nachteile bei der Verwendung von Elementen höherer Ordnung und feinerer Diskretisierung. Ein wesentlicher Nachteil ist die benötigte Rechenzeit zum Simulieren des akustischen Feldes (Abbildung 3.4). Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das zylinderför-



**Abbildung 3.4.:** Die benötigten Rechenzeiten für die COMSOL Modelle in Abhängigkeit der Knoten pro Wellenlänge und der Art des Modells.

mige Modell ein etwas größeres Volumen besitzt, wodurch mehr Elemente benötigt werden. Dadurch ist die Rechenzeit für das zylinderförmige Modell etwas größer. Bei der Analyse ist es ersichtlich, dass unabhängig vom Modellansatz der Rechenaufwand bei den quadratischen Elementen quadratisch und bei den linearen Elementen linear ansteigt. Der Vergleich zwischen der Leistungsfähigkeit der linearen und quadratischen Elemente erfordert die Ermittlung der Freiheitsgrade des gelösten Gleichungssystems. Hierbei ist der Freiheitsgrad für die quadratischen Elemente ungefähr viermal größer als bei den linearen Elementen. Um einen Vergleich zu ermöglichen, muss daher die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden verwendet werden. Diese Fälle würden beispielsweise bei 10 und 17 Knoten pro Wellenlänge der linearen Dreiecke und 5 und 10 Knoten pro Wellenlänge der quadratische Elemente auftreten. Trotz ungefähr gleicher Anzahl an Freiheitsgraden, würde sich in beiden Fällen eine genauere Simulation mit den quadratischen Elementen ergeben. In den jeweiligen Fällen ist die Rechenzeit ungefähr gleich groß und daher ist es zu empfehlen die quadratischen Elemente bei der Simulation mit der FEM zu verwenden.

### 3.2.2 Field II

Field II [24, 25] ist ein frei erhältliches Programmpaket, welches für MATLAB entwickelt wurde. Dieses Programm eignet sich sowohl zur Simulation von transienten als auch für harmonische Signalformen. Im Gegensatz zu COMSOL existiert keine graphische Benutzeroberfläche, sodass die Entwicklung der Modelle und Simulationen in Form von Programmcode erfolgt. Jedoch gibt es bereits in diesem Programmpaket eine Vielzahl von fertigen Funktionen. Dazu gehören unter anderem die Definition von den erregenden Schallquellen, die Definition des Mediums oder die Festlegung von Schall streuenden Objekten [50]. Basierend auf diesen Funktionen ist ein Modellaufbau sehr schnell möglich und es müssen nur die Simulationsparameter beschrieben werden. Aufgrund der einfachen Handhabung und der recht kurzen Simulationszeiten, wird dieses Programm häufig zur Simulation, hauptsächlich in der Medizintechnik [1], verwendet.

Die prinzipielle Methode, auf der Field II basiert, ist die räumliche Impulsantwort (SIR). Die ersten Entwicklungen dieser Methode basieren auf [51], welche dann durch Tupholme und Stephanishen weiter entwickelt wurden. Auf der Basis von diesen theoretischen Entwicklungen [52, 53, 54] ist das Programm

Field II entstanden. Grundlage dieser theoretischen Entwicklung ist das zeitlich abhängige Rayleigh Integral. Das Integral

$$p(\vec{r}_p, t) = \frac{\rho_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_F \frac{v_n(\vec{r}_q, t - \frac{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{c_0})}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF \right) \quad (3.3)$$

ist hierbei das für zeitlich abhängige Verläufe gültige Rayleigh Integral, bei dem genauso wie bei dem Integral für harmonische Erregungen entsprechend der Gleichung (2.38), eine unendlich ausgedehnte schallharte Wand vorausgesetzt wird. Durch die vorausgesetzte Wirbelfreiheit der Schnelle, kann diese durch ein Geschwindigkeitspotential  $\psi$  beschrieben werden. Dieses Geschwindigkeitspotential kann auch auf den Druck angewendet werden, sodass sich der Zusammenhang

$$\psi(\vec{r}_p, t) = \iint_F \int_{t_2} \frac{v_n(\vec{r}_q, t_2) \delta\left(t - t_2 - \frac{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{c_0}\right)}{2\pi R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dt_2 dF \quad (3.4)$$

ergibt [55]. Diese Umformung des Drucks basiert auf der linearisierten Euler'schen Bewegungsgleichung, bei dem die Schnelle durch das Geschwindigkeitspotential ersetzt wurde. Neben der Darstellung über das Geschwindigkeitspotential, ist die erregende Schnelle über der Oberfläche mit einem Dirac Impuls gefaltet. Dadurch ist das Signal von der Apertur von der geometrischen Anordnung getrennt. Unter der Annahme, dass die Schnelle auf der Oberfläche sich konstant verteilt und es somit keine räumliche Abhängigkeit gibt, kann das Integral zu

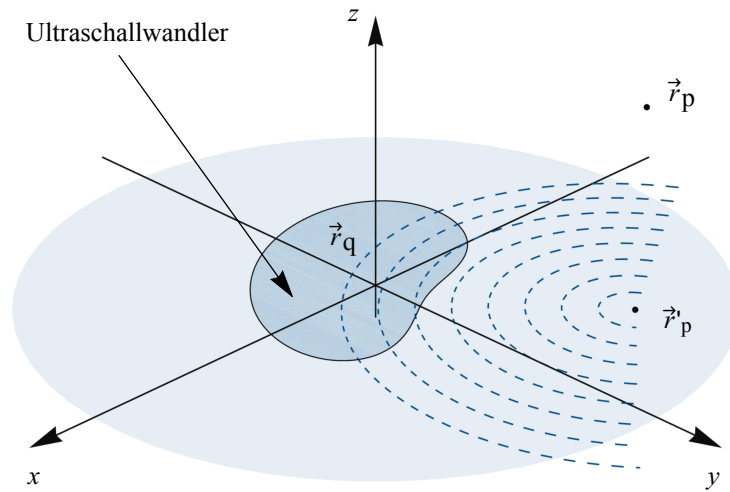
$$\psi(\vec{r}_p, t) = v_n(t) * \iint_F \frac{\delta\left(t - \frac{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{c_0}\right)}{2\pi R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF \quad (3.5)$$

umgeformt werden. Mit diesem Ausdruck wird ein beliebiges erregtes Signal, welches über die Schnelle auf der Oberfläche des Wandlers definiert wird, mit der räumlichen Impulsantwort gefaltet. Abschließend wird das Geschwindigkeitspotential wieder auf den Druck überführt. Es folgt

$$p(\vec{r}_p, t) = \rho_0 \frac{\partial v_n(t)}{\partial t} * h(\vec{r}_p, t) \text{ mit } h(\vec{r}_p, t) = \iint_F \frac{\delta\left(t - \frac{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{c_0}\right)}{2\pi R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF. \quad (3.6)$$

Hierbei ist  $h(\vec{r}_p, t)$  die räumliche Impulsantwort, welche mit der zeitlichen Ableitung der Schnelle in Normalenrichtung gefaltet wird. Der wesentliche Aufwand besteht nun darin, die räumliche Sprungantwort  $h(\vec{r}_p, t)$  zu ermitteln. Diese Lösung wird mit Hilfe der Reziprozität, bei dem der akustische Sender und Empfänger vertauscht werden können, hergeleitet (Abbildung 3.5).

Dabei ist der Feldpunkt der Ursprung von Kugelwellen und der akustische Wandler befindet sich in einer unendlich ausgedehnten Ebene. Die Kugelwellen schneiden diese Ebene und es bilden sich Schnitkreise, die den selben Abstand zu dem Feldpunkt im Raum haben. Hierbei ist der Ursprung der Kreise gerade der Lotpunkt  $\vec{r}'_p$  des Feldpunktes. Diese Kreise haben den Radius  $r$  und es ergibt sich der euklidische Abstand zum Feldpunkt  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ , bei dem  $z$  der Abstand zwischen der Ebene und dem Feldpunkt ist. Ab einem bestimmten Radius schneiden die Kreise die akustische Apertur, in mindestens zwei Punkten. Diese Schnitpunkte der Apertur und des Kreises entsprechen den Winkeln, die angeben wie groß die entsprechende Kreislänge auf der Apertur ist. Aufgrund der Zeitabhängigkeit der Signale sind auch die



**Abbildung 3.5.:** Grundsätzliches Modell zur Simulation in Field II, bei dem die Reziprozität des akustischen Systems verwendet wird. Der Feldpunkt wird in die Ebene des akustischen Wandlers projiziert. Die ausgehenden Kugelwellen vom Feldpunkt schneiden die Ebene und es bilden sich Schnittkreise [55].

Distanzen zeitabhängig und somit auch die geschnittenen Winkel. Es lässt sich für einfache Geometrien die räumliche Impulsantwort mit

$$h(\vec{r}_p, t) = \frac{c}{2\pi} \sum_{n=1}^{N(t)} \varphi_2^n(t) - \varphi_1^n(t) \quad (3.7)$$

berechnen [55]. Mit dieser Gleichung werden alle Kreisabschnitte beziehungsweise Schnittpunkte der Kreise, wobei  $N(t)$  den jeweiligen Kreis kennzeichnet, aufsummiert.

Wichtig ist an dieser Stelle die Unterscheidung zwischen der Lage des Lotpunktes. Liegt dieser innerhalb der Apertur so haben alle Radien, die kleiner als der Abstand zwischen dem Lotpunkt und der Apertur sind, das Winkelmaß von  $2\pi$ . Ab einem bestimmten Radius werden die Kreise nicht mehr komplett innerhalb der geometrischen Apertur sein und es müssen die Winkeldifferenzen der Schnittpunkte von  $2\pi$  abgezogen werden. Für einige Grundformen des akustischen Wandlers existieren räumlichen Impulsantworten, wie beispielsweise eines Kreises oder Rechtecks.

In Field II werden die Geometrien über Rechtecke, Dreiecke oder begrenzende Konturen approximiert [50]. Für jedes dieser Elemente wird die räumliche Impulsantwort ermittelt und entsprechend mit der Schnelle gefaltet. Dabei kann auch eine Apodisation, welche dem physikalischen Wandler entspricht, mittels der für dieses Element vorhandenen Schallschnelle umgesetzt werden. Die Signale der Elemente werden anschließend aufsummiert und mit einer vorgegebenen Frequenz abgetastet. Dieses abgetastete Signal entspricht dem Druckverlauf in dem vorgegebenen Feldpunkt.

Das beschriebene konzeptionelle Vorgehen zum Simulieren ist durch eine Vielzahl von Funktionen in Field II implementiert. Aufgrund der Verwendung in MATLAB liegen die meisten Funktionen als m-Dateien vor. Der wesentliche Kern der Feldberechnung wird jedoch über eine kompilierte Datei ausgeführt. Der Programmablauf ist in 6 Schritte untergliedert. Dieser und die Implementierung orientiert sich an [50]. Hierbei muss zunächst das Programm Field II initialisiert werden. Anschließend erfolgt die

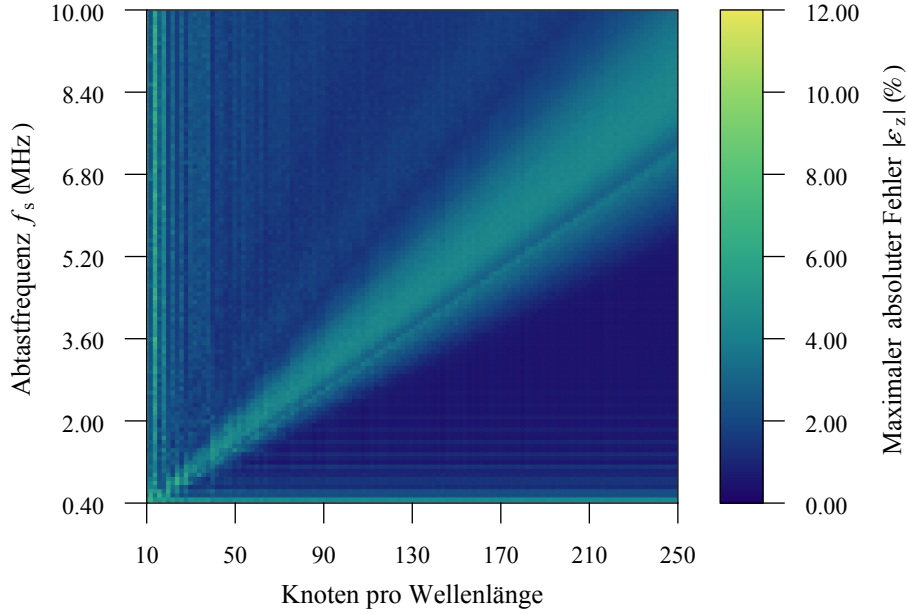
Festlegung der geometrischen und physikalischen Parameter und die Berechnung der abgeleiteten physikalischen Größen. Es wurden die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0 = 343,3 \text{ m s}^{-1}$ , die Schallschnelle in Normalenrichtung  $v_n = 1 \text{ m s}^{-1}$ , die Erregungsfrequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  und der Radius des Ultraschallwandlers  $a = 6.4 \text{ mm}$  für die Simulation ausgewählt. Eigentlich würde an dieser Stelle noch die Abtastfrequenz und die Anzahl der Elemente für den Kolbenstrahler bestimmt werden, weil jedoch diese zwei Größen einen Einfluss auf die Genauigkeit der Lösung haben werden diese gesondert in die Simulation eingefügt. Als erstes wird das Medium anhand der Ausbreitungsgeschwindigkeit und der Dämpfung charakterisiert.

Anschließend erfolgt die Beschreibung der akustischen Quelle. Hierfür gibt es bereits eine Funktion, mit der ein kreisförmiger Kolbenstrahler definiert wird. Die übergebenen Parameter sind zum einen der Radius des Wandlers und zum anderen die Größe der Elemente mit denen er diskretisiert wird. Dabei sind die verwendeten Elemente Quadrate und deren Größe wird mit Knoten pro Wellenlänge angegeben. Aufgrund des Einflusses auf die Genauigkeit der Simulation werden die Anzahl der Knoten pro Wellenlänge hinsichtlich des auftretenden Fehlers untersucht. Die Anzahl der Knoten wird beginnend bei 10 Knoten schrittweise um 2 Knoten erhöht, bis 250 Knoten pro Wellenlänge erreicht wird.

Nachdem die Geometrie des Wandlers beschrieben ist, kann die Erregungsform bestimmt werden. Dazu wird für den zu untersuchenden Fall eine harmonische Anregung mit 10 Zyklen angenommen, welche eine Amplitude der zuvor definierten Schallschnelle besitzt. Die zeitliche Schrittweite dieses Signals ist die Periodendauer der Abtastfrequenz. Diese Abtastfrequenz ist ebenfalls für die Genauigkeit des Schallfeldes wichtig und wird neben der Elementanzahl zur Fehleranalyse untersucht. Dabei ist die Abtastfrequenz ein Vielfaches der Frequenz des Erregungssignals. Sie beginnt bei dem zehnfachen der Erregungsfrequenz und wird schrittweise um zwei erhöht bis zu einer Abtastfrequenz  $f_s = 10 \text{ MHz}$ , was einer 250 höheren Frequenz entspricht. Neben der Verwendung für das Erregungssignal wird die Abtastfrequenz mit einer Funktion dem Programm Field II übergeben. Im Anschluss werden das Erregungssignal und die Geometrie des Kolbenstrahlers vereinigt. Für die Zusammenführung gibt es für einen kreisförmigen Kolbenstrahler eine eigene Funktion, sodass die Umsetzung sehr einfach erfolgen kann. An dieser Stelle bestünde noch die Möglichkeit, weitere akustische Quellen und Inhomogenitäten des Mediums hinzuzufügen oder die Randbedingungen zu verändern. Aufgrund des Ziels, die Genauigkeit von der simulierten Schallabstrahlung eines Kolbenstrahlers zu untersuchen und mit den analytischen Gleichungen zu vergleichen, werden keine weiteren Einstellungen benötigt. Dadurch wird im letzten Schritt die Simulation des Feldes mit einer Funktion gestartet. Bei dieser Funktion werden die Geometrie des Kolbenstrahlers mit dem Erregungssignal und die zuvor definierten Feldpunkte übergeben. Abschließend erfolgt die Simulation und es werden die zeitlichen Druckverläufe ausgegeben.

Zum Vergleich mit dem harmonischen Druckverlauf, werden die zeitlich abhängigen Signalformen in den Frequenzbereich transformiert. Anhand dieser wird eine Fehleranalyse durchgeführt. Es sind hierbei die Anzahl der Elemente und die Abtastfrequenz als Eingangsparameter festgelegt und es wird untersucht, bei welcher Konfiguration ein möglichst kleiner Fehler auftritt. Mithilfe der analytischen Lösung wird ein Vergleich zu dem simulierten Schallfeld des Kolbenstrahlers entlang der z-Achse durchgeführt. Es werden 1001 Feldpunkte beginnend bei  $z_p = 0 \text{ m}$  bis  $z_p = 1 \text{ m}$  mit einer Schrittweite  $\Delta z_p = 1 \text{ mm}$  ausgewählt. Dabei war die Berechnung nicht auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers möglich, sodass der erste Feldpunkt bei  $z_p = 0 \text{ m}$  keine Lösung darstellt. Die übrigen 1000 Feldpunkte wurden jedoch zur Analyse verwendet. Es wird zum einen der maximal absolut auftretende Fehler und der durchschnittliche absolute Fehler untersucht.

In der Abbildung 3.6 wird der maximale absolute Fehler  $|\varepsilon_z|$  nach der Gleichung (2.47) für alle Feldpunkte entlang der z-Achse gezeigt. Der Fehler wird entsprechend der Annahme, dass die Messung eine Genauigkeit von  $\pm 1 \text{ dB}$  hat (Kapitel 4.3), untersucht. Aus der Messunsicherheit des Messplatzes ist der auftretende Fehler ungefähr  $\pm 12\%$ . Deshalb sollen die simulierten Ergebnisse stets einen kleineren Fehler als diesen aufweisen. Eine wichtige Erkenntnis aus dieser Untersuchung ist, dass der größte maximale Fehler von allen möglichen Kombinationen aus Abtastfrequenz und Elemente pro Wellenzahl bei  $|\varepsilon_z| \approx 7,2\%$  liegt. Demzufolge sind die simulierten Ergebnisse innerhalb des Messbereichs und



**Abbildung 3.6.:** Maximal absoluter Fehler  $|\varepsilon_z|$  für die Simulation entlang der z-Achse im Vergleich zur analytischen Lösung entsprechend der Gleichung (2.47).

können somit eine zuverlässige Voraussage zur Charakterisierung der Schallwellenausbreitung des Kolbenstrahlers geben.

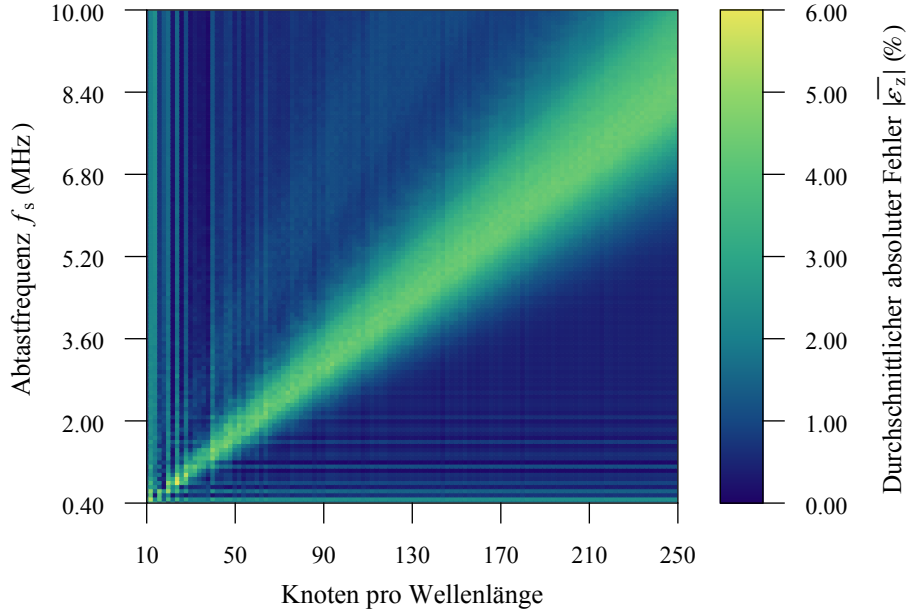
Trotzdem werden die Ergebnisse analysiert um eine Kombination mit einem möglichst kleinen Fehler zu ermitteln. Aus der Darstellung sind zwei wesentliche Eigenschaften abzulesen. Bei niedrigen Abtastfrequenzen, welche zwischen  $f_s = 400 \text{ kHz}$  bis  $f_s = 800 \text{ kHz}$  liegen, ist der auftretende Fehler größer. Hierbei ist der Fehler im Wesentlichen unabhängig von der diskretisierten Elementanzahl des Kolbenstrahlers. Analog dazu gilt auch das Gleiche für die Anzahl der Elemente in Abhängigkeit der Abtastfrequenz. Durch eine geringe Elementanzahl, welche in einem Bereich von ungefähr 10 bis 40 Knoten pro Wellenlänge liegt, existiert ebenfalls eine größere Ungenauigkeit. Auch in diesen Fällen ist der Fehler weitestgehend unabhängig von der Abtastfrequenz. Durch diese Unabhängigkeiten der beiden Fälle und des jeweils relativ großen Fehlers zu den übrigen Konfigurationen, sollte die Diskretisierung mit mindestens 40 Knoten pro Wellenlänge und das Signal mit mindestens der zwanzigfachen Frequenz des erregenden Signals abgetastet werden. Die relativ großen Ungenauigkeiten für diese Konfigurationen können mit der unzureichenden zeitlichen und räumlichen Diskretisierung der Geometrie begründet werden. Es gibt weitere Kombinationen, in denen der Fehler relativ groß ist. Dies tritt in dem durchgeführten Testfall bei einem Verhältnis der Zeitschritte zu der räumlichen Schrittweite, welche mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit multipliziert werden, von ungefähr eins auf. Der verwendete Zeitschritt ist hierbei die Periodendauer der Abtastfrequenz. Des Weiteren ist der maximal absolute Fehler deutlich kleiner, wenn die Abtastfrequenz kleiner als die Knoten pro Wellenlänge ist. Aus diesem Grund sollte die Abtastfrequenz nicht zu groß im Verhältnis zur räumlichen Diskretisierung ausgewählt werden.

Neben den maximalen absoluten Fehlern wird auch der durchschnittliche absolute Fehler der verschiedenen Kombinationen untersucht (Abbildung 3.7). Dieser Fehler wird nach

$$\overline{|\varepsilon_z|} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varepsilon_{z_n}| \quad (3.8)$$

berechnet. Mit dieser Berechnung wird vermieden, dass sich positive und negative Fehler ausgleichen. Es wird daher der existierende Fehler betragsmäßig gemittelt. Der durchschnittliche absolute Fehler ist





**Abbildung 3.7.:** Durchschnittlicher absoluter Fehler  $|\overline{\varepsilon_z}|$  entlang der z-Achse im Vergleich zur analytischen Lösung.

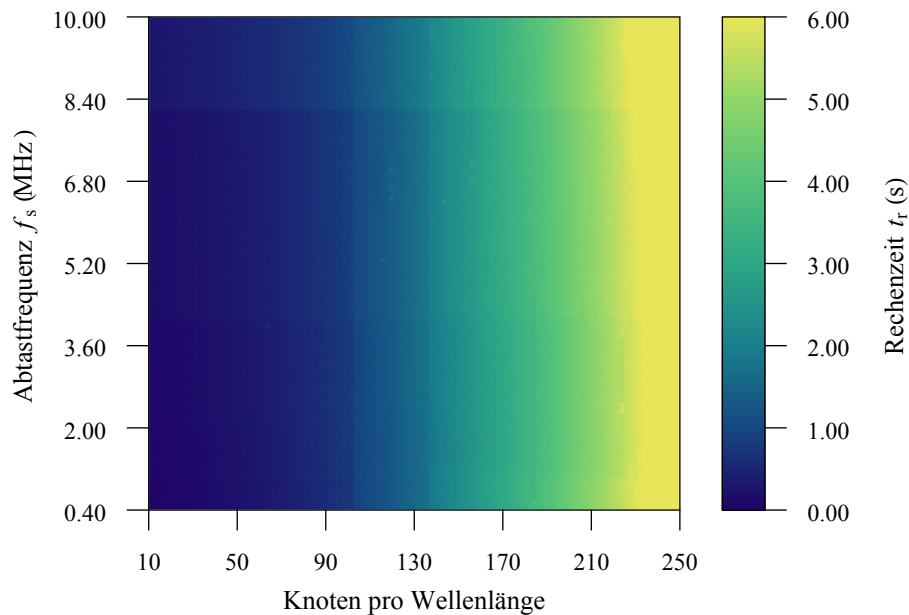
hierbei deutlich kleiner als die geforderte Genauigkeit von  $\pm 12\%$ . Dadurch kann angenommen werden, dass die Simulationen mit Ausnahme von einzelnen Kombinationen aus Abtastfrequenz und der Knoten pro Wellenlänge sehr präzise ablaufen.

Neben der Fehleranalyse entlang der z-Achse wird auch eine für das Fernfeld durchgeführt. Die Simulationen werden dazu für 361 Feldpunkte entlang eines Halbkreises, der sich in einem Abstand 1 m zum Kolbenstrahler befindet, durchgeführt. Die Schrittweite zwischen den einzelnen Punkten ist hierbei  $0,5^\circ$ . Anschließend erfolgt der Vergleich zwischen den Simulationen und der analytischen Lösung entsprechend der Gleichung (2.48). Dabei sind sowohl der maximale absolute Fehler (Abbildung A.1) als auch der durchschnittliche Fehler (Abbildung A.2) im Anhang A dargestellt.

Im Gegensatz zum Fehler bezogen auf die analytische Lösung entlang der z-Achse ist der Fehler bezogen auf das Fernfeld deutlich größer. Während bei der ersten Fehlerbetrachtung alle simulierten Lösungen innerhalb der vorgegebenen Grenzen lagen, sind bei der Simulation im Fernfeld nur noch 10 von 29282 Kombinationen aus Abtastfrequenz und Knoten pro Wellenlänge innerhalb des Fehlerbereichs. Diese sehr großen Fehler existieren hauptsächlich durch den Nulldurchgang, welcher im Fernfeld des Kolbenstrahlers existiert. Die analytische Lösung des Fernfeldes ist in der Abbildung 2.5 für eine Helmholtz Zahl  $He = 4$  dargestellt und entspricht ungefähr dem simulierten Fall mit einer  $He \approx 4,7$ , welche dem Ultraschallwandler bei einer Frequenz  $f = 40$  kHz entspricht. Aus dieser Abbildung lässt sich entnehmen, dass sich zwischen der Hauptkeule und der Nebenkeule Nulldurchgänge ausbilden. In den Simulationen ist es jedoch schwierig diese Nulldurchgänge anzunähern. Daher ist der große auftretende Fehler beim Nulldurchgang eine Ausnahme. Die meisten simulierten Feldpunkte des Fernfeldes für die verschiedenen Kombinationen der räumlichen und zeitlichen Auflösung liegen innerhalb der vorgegebenen Fehlertoleranz von  $\pm 12\%$  der analytischen Lösung. Das lässt sich gut in der Abbildung A.2 erkennen, die den durchschnittlichen absoluten Fehler darstellt. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass bei den meisten Kombinationen die Simulationsergebnisse innerhalb der Toleranz liegen.

Von allen getesteten Kombinationen hat sich die Variante mit einer Abtastfrequenz  $f_s = 5,28$  MHz und der Diskretisierung des Kolbenstrahlers mit 180 Knoten pro Wellenlänge als die geeignetste Variante herausgestellt. Bei dieser Kombination sind sowohl die Fehler entlang der z-Achse als auch im Fernfeld innerhalb der Toleranzen. Der Fehler entlang der Feldpunkte im Fernfeld lag zwischen  $\varepsilon_\theta \approx -5,35\%$  und

$\varepsilon_\theta \approx 4,46\%$  und für die Punkte entlang der z-Achse in einem Bereich von  $\varepsilon_z \approx -2,99\%$  bis  $\varepsilon_z \approx 2,64\%$ . Dadurch kann mit dieser Variante eine genaue Simulation entsprechend der vorgegebenen Grenzen erreicht werden.



**Abbildung 3.8.:** Rechenzeit für die Simulation des Schallfeldes von 1000 Feldpunkten entlang der z-Achse mit dem Programm Field II.

Neben der Genauigkeit wird auch die jeweilige Rechenzeit für die Simulationen untersucht (Abbildung 3.8). In dieser Darstellung wird deutlich, dass der Zeitaufwand für die Simulation im Wesentlichen von der Anzahl der Knoten pro Wellenlänge abhängig ist. Dafür ist die verwendete Methode für die Simulation verantwortlich. Der eigentliche Rechenaufwand bei der Integration ist die Berechnung der räumlichen Impulsantwort. Die anschließende Faltung mit dem erregten Signal des Ultraschallwandlers wirkt sich weniger auf die Rechenzeit aus. Es gibt lediglich kleine Unterschiede, wenn die Abtastung des Signals größer wird und somit mehrere Zeitschritte gespeichert werden. Aus diesem Grund lässt sich schlussfolgern, dass die Abtastfrequenz für den Speicherbedarf und die Diskretisierung des Kolbenstrahlers für den Zeitbedarf entscheidend sind.

Die Untersuchung der Simulationen mit Field II hat gezeigt, dass sich ein Programm zur Schallabstrahlung sehr einfach entwickeln lässt. Dabei erfolgt die Modellbildung auf Basis der räumlichen Sprungantwort bei der das zeitlich abhängige Rayleigh Integral verwendet wird. Dadurch sind die Modelle zwar auf die Lage der akustischen Quellen in schallharten beziehungsweise schallweichen Wänden begrenzt, allerdings können beliebige Formen als auch Krümmungen verwendet werden. Auch eine beliebige Erregungsform der Schallquellen kann verwendet werden und jedem einzelnen Element zugeordnet werden. Jedoch erfolgt die Simulation im Zeitbereich, sodass eine Konvergenzanalyse sowohl in der räumlichen als auch in der zeitlichen Dimension durchgeführt werden muss. Die Simulationen verlaufen an sich sehr schnell, jedoch aufgrund der notwendigen Konvergenzanalyse sind eine Vielzahl von Simulationsdurchläufen unabdingbar. Für den systematischen Durchlauf von 29282 Varianten mit verschiedenen Abtastfrequenzen und Diskretisierungen des Ultraschallwandlers bedarf es einem ungefähren zeitlichen Aufwand von  $t_r = 9,5$  h. Verglichen mit dem zeitlichen Aufwand einer einzelnen Simulation von wenigen Sekunden ist der gesamte Rechenaufwand sehr viel größer. Diese ist aber aufgrund des vorhandenen Fehlers unbedingt nötig, weil sonst der Rechenaufwand zwar niedrig ist, aber dafür die Ergebnisse ungenau werden und gegebenenfalls nicht mehr für den Vergleich mit der Realität und den Messungen übereinstimmt. Aber es konnte mithilfe der analytischen Lösungen gezeigt werden, dass der auftretende



Fehler der Simulationen für einen kreisförmigen Kolbenstrahler innerhalb der geforderten Genauigkeit von  $\pm 12\%$  liegen. Aus diesem Grund kann Field II sehr gut für die Simulation verwendet werden, auch wenn eine Vielzahl von Kombinationen zur Fehleranalyse benötigt werden.

### 3.3 Numerische Integrationsverfahren

In den vorherigen Kapiteln wurden verschiedene Simulationsprogramme dargestellt. Anhand dieser können zwar eine Vielzahl beliebiger Formen von Ultraschallwandlern simuliert werden, dennoch haben die verwendeten Methoden den Nachteil, dass sie das Schallfeld nur numerisch lösen. Deshalb wird die Untersuchung auch mit einem semi-analytischen Verfahren durchgeführt und zum Vergleich mit den bisherigen Methoden herangezogen (Kapitel 3.6). Eine genauere Möglichkeit zur Berechnung der Schallabstrahlung existiert über die direkte Integration über die Oberfläche des Kolbenstrahlers. Der Modellansatz wurde bereits in dem Kapitel 2.4 gezeigt. Hierbei wurde das KHI durch die Einführung einer unendlich ausgedehnten Ebene zum Rayleigh Integral überführt. Durch die Eigenschaft, dass die Ebene schallhart ist, werden die Randbedingungen über diese vorgegeben. Die Neumann Randbedingungen entsprechen der physikalischen Schallschnelle in Normalenrichtung der Oberfläche und durch die Bedingung, dass die Wand schallhart ist, gilt für die Schnelle  $v_n = 0 \text{ m s}^{-1}$ . Außerdem wurde gezeigt, dass von dem ursprünglichen KHI nur die Monopolterme übrig geblieben sind. Aus diesem Grund ist es nicht notwendig, die Dirichlet-Bedingungen, welche dem Druck entsprechen, zu berechnen und in dem Oberflächenintegral zu berücksichtigen. Die Berechnung der Schallabstrahlung kann somit direkt mit der Integration über die Wandleroberfläche beziehungsweise über eine Öffnung, die sich in der schallharten Wand befindet, durchgeführt werden. Zwar stellt dieses eine wesentliche Einschränkung der Lage des Ultraschallwandlers dar, jedoch kann diese zur grundsätzlichen Charakterisierung des Schallfeldes von dem Wandler verwendet werden. Eine Anpassung des Modells mit der exakten geometrischen Anordnung für die praktische Verwendung ist somit mit dieser Methode nicht möglich. Trotz dieser geometrischen Einschränkung ist der große Vorteil dieser Methode der analytische Modellansatz gegenüber den zuvor durchgeführten Simulationen. Anhand dieses Modells können direkt die Eigenschaften des Systems von den Eigenschaften der Eingangsgrößen abgeleitet werden und es bedarf keiner aufwendigen Studien bezüglich einzelner Parameter, die in den numerischen Simulationen verwendet werden.

Die direkte analytische Berechnung des Rayleigh Integrals kann mit Ausnahme von wenigen geometrischen Formen (Kapitel 2.4.2) nicht durchgeführt werden. Es können somit zwar keine analytischen Lösungen des Integrals ermittelt werden, jedoch können die Integrale mit verschiedenen numerischen Integrationstechniken berechnet werden. Die numerische Integration des Rayleigh Integrals wurde in Mathematica der Version 11.0 [20] durchgeführt. In diesem Programm können sehr viele Methoden und Strategien zur numerischen Lösung der Integrale verwendet werden. Die Methoden sind zum einen durch die Ordnung des Integrals und zum anderen durch den Integranden eingeschränkt, sodass sich die Methoden besser oder schlechter zum Lösen eignen. Aufgrund des hoch oszillierenden Kerns des Rayleigh Integrals und der vorhandenen Singularität des Integrals werden die numerischen Integrationsmethoden ausgewählt, mit denen diese Art des Integrals gelöst werden können.

Bei der numerischen Integration kommen zunächst die Gauß'schen Integrationstechniken in Betracht. Hierbei wird das bestimmte Integral

$$\int_{x_u}^{x_o} f(x) dx \approx \sum_{n=1}^N w_n f(x_n) \quad (3.9)$$

für eine beliebige Funktion  $f(x)$  durch eine Summe mit gewichteten Werten  $w_n$  und den Funktionswerten an den jeweiligen Variablen angenähert. Die Auswahl der Stützstellen ist nicht willkürlich, sondern diese werden genau wie die Wichtungen berechnet. Die zu verwendenden Stellen werden im Allgemeinen als Gauß'sche Punkte (GP) bezeichnet. Bevor die Auswertung der Summe erfolgt, werden die

---

festen Grenzen und somit auch die Variablen auf die Integrationsgrenzen  $[-1, 1]$  überführt. Auf Grundlage der Gauß'schen Integration sind in Mathematica unter anderem die Gauß-Kronrod [56] und die Lobatto-Kronrod [57] Methoden nach [58] implementiert. Diese zwei Methoden sind hierbei eine Weiterentwicklung der Gleichung (3.9) und ähneln sich daher in ihrem grundsätzlichen Verhalten.

Darüber hinaus wird die Integrationstechnik nach Newton-Cotes [59] angewendet. Dabei wird das zu berechnende Integral zunächst durch ein Polynom angenähert. Das Polynom wird hierbei aus Variablen und den dazugehörigen Funktionswerten gebildet. Der einfachste Fall besteht aus zwei Punktpaaren, welche im eindimensionalen Fall die Trapez-Methode widerspiegelt. Für höhere Polynome wird die Lagrange Interpolation verwendet. Die Integration der angenäherten Funktion muss daher nicht direkt erfolgen, sondern es wurden bereits allgemeingültige Integrationen des Polynoms durchgeführt. Aus diesem Grund werden die Funktionswerte für die Variablen nur in den gelösten Integral eingesetzt. Die benötigten Faktoren und die Zusammensetzung kann aus [59] entnommen werden.

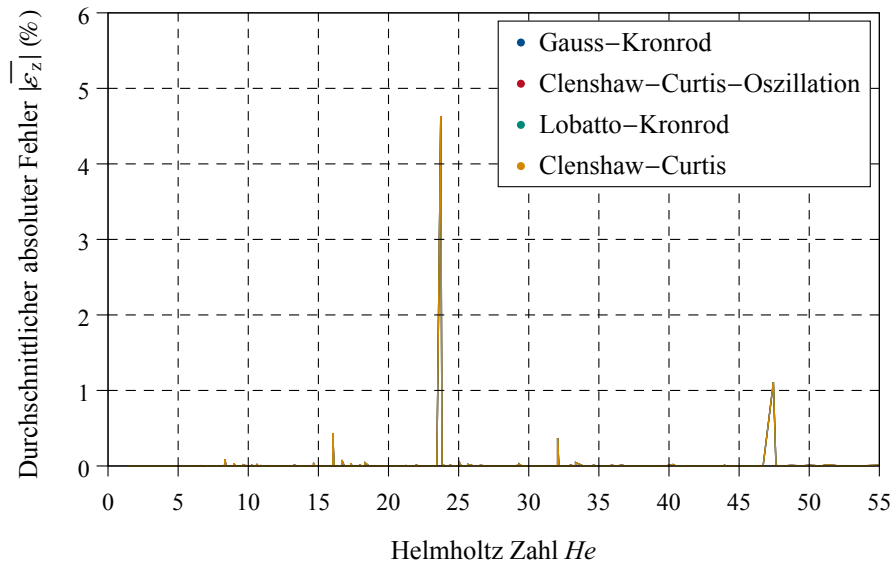
Des Weiteren werden die Integrationsmethoden, die speziell für oszillierende Integranden entwickelt wurden, verwendet. Zu diesen Methoden gehören die Clenshaw-Curtis Methode mit der abgewandelten Form der Clenshaw-Curtis Oszillations Methode [60] und die Methode nach Levin [61]. Bei diesen Integrationstechniken wird der Integrand mit Tschebyscheff Polynomen erweitert.

Als letzte Variante wird die Integration mit der Monte-Carlo Technik [62] untersucht. Im Gegensatz zu den anderen numerischen Integrationstechniken ist diese Integration nicht deterministisch. Der Grund hierfür liegt in der Methode, bei der zufällige Zahlen beispielsweise auf einer Oberfläche oder innerhalb eines Volumens verteilt werden. In diesen zufällig gewählten Punkten wird anschließend der Integrand berechnet und von diesen der Mittelwert bestimmt. Eine anschließende Multiplikation des Mittelwerts mit der Größe des Integrationsbereichs führt zur Lösung des Integrals. Diese Methode führt zwar streng genommen bei jeder Integration zu einem anderen Ergebnis, werden jedoch eine genügend große Zahl an zufälligen Punkten in der Domäne gewählt, streben diese Lösungen einen Grenzwert an. Dieser Grenzwert entspricht nach dem Gesetz der großen Zahlen der Lösung des Integrals.

Die numerische Integration mit den beschriebenen Techniken wurde für den Testfall des Ultraschallwandlers mit einem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und einer harmonischen Erregung von  $f = 40 \text{ kHz}$  durchgeführt. Die berechneten Ergebnisse von allen Integrationsmethoden sind sowohl entlang der z-Achse als auch im Fernfeld innerhalb der Toleranzgrenzen. Bei den deterministischen Verfahren ist die Genauigkeit jedoch noch signifikant größer. Die deterministischen Lösungen hatten ungefähr den selben Fehler  $\bar{\epsilon}_z = 21,87 \cdot 10^{-6} \%$  während bei der numerischen Integration mit der Monte-Carlo Technik der Fehler  $\bar{\epsilon}_z = 0,123 \%$  lag. Aus diesem Grund ist davon auszugehen, dass die numerischen Integrationstechniken äußerst präzise sind.

Zur Ermittlung der geeignetsten Integrationstechnik werden weitere Fälle untersucht. Dabei werden sowohl der Radius der Ultraschallwandlers als auch die Frequenz variiert. Beginnend mit einem Radius von  $a = 2 \text{ mm}$  und einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  wurde der Radius stückweise um einen  $0,5 \text{ mm}$  und die Frequenz um  $10 \text{ kHz}$  erhöht bis zu einem Radius  $a = 20 \text{ mm}$  und einer Frequenz  $f = 150 \text{ kHz}$ . Die Frequenz wurde für das Medium Luft mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0 = 343,3 \text{ m s}^{-1}$  in die Wellenzahl umgeformt. Dadurch können diese beiden Größen zusammen als Helmholtz Zahl zusammengefasst werden.

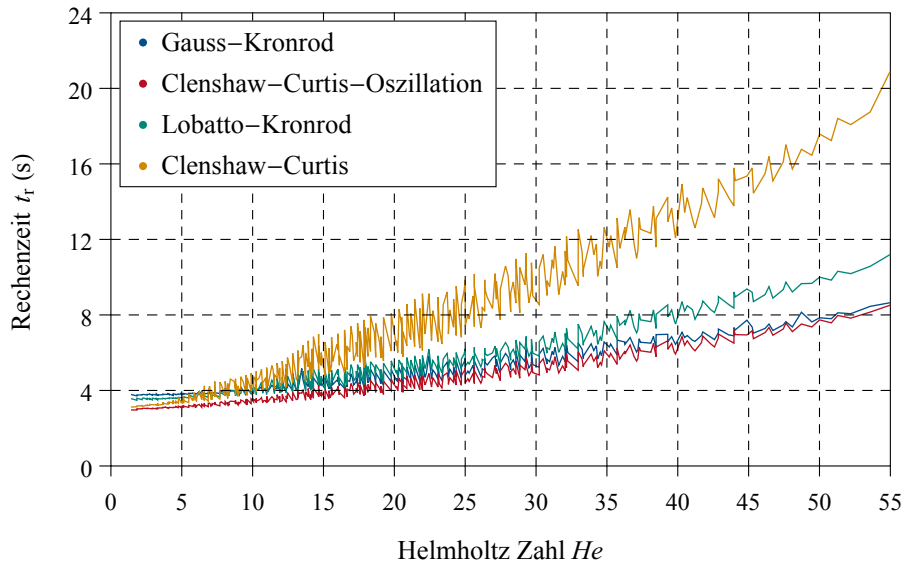
In der Abbildung 3.9 wird der durchschnittliche absolute Fehler für die vier geeignetsten Integrationstechniken hinsichtlich der Genauigkeit als auch der benötigten Rechenzeit gezeigt. Die durchschnittlichen absoluten Fehler der vier Integrationstechniken sind, genauso wie bei den nicht gezeigten Methoden von Levin und Newton-Cotes, nahezu identisch. Der Fehler für die Integration mit der Monte-Carlo Technik ist auch für die dargestellten Helmholtz Zahlen deutlich größer. Durch die Nulldurchgänge der analytischen Lösung entlang der z-Achse (Abbildung 2.4) treten bei einigen Kombinationen größere Fehler der numerisch gelösten Integrale auf. Das ist ähnlich zu der Fernfeldbetrachtung bei Field II (Kapitel 3.2.2), in dem die Nulldurchgänge auch nicht optimal simuliert werden konnten. Jedoch konnte in diesem Fall durch eine Erhöhung der räumlichen und zeitlichen Auflösung der Fehler reduziert werden. Bei der numerischen Integration in Mathematica kann zwar auch die Genauigkeit erhöht werden,



**Abbildung 3.9.:** Verifikation der numerischen Integrationsmethoden anhand des durchschnittlichen absoluten Fehlers  $|\varepsilon_z|$  bezogen auf die analytische Lösung des Schalldrucks entlang der z-Achse nach der Gleichung (2.47).

jedoch werden bereits für diese Fälle die größtmögliche Genauigkeit verwendet und es kann somit keine bessere Lösung ermittelt werden. Ansonsten sind die Fehler für die berechneten Integrale der verschiedenen Kombinationen aus Radius und Frequenz sehr gering und sind zum größten Teil  $\varepsilon_z \leq 10^{-5}\%$  für die deterministischen Integrationstechniken. Die benötigte Rechenzeit zum numerischen Lösen dieser Integrale für die verschiedenen Helmholtz Zahlen wird in der Abbildung 3.10 dargestellt.

Während bei kleinen Helmholtz Zahlen  $He = 10$  die Rechenzeit der vier abgebildeten numerischen Integrationstechniken fast gleich groß ist, zeigt sich bei zunehmenden Helmholtz Zahlen, dass die Methode nach Clenshaw-Curtis und Lobatto-Kronrod zeitaufwendiger sind. Die oszillierende Methode von Clenshaw-Curtis ist dagegen wesentlich schneller für größere Helmholtz Zahlen. Ungefähr genauso schnell lässt sich das Integral mit der Methode von Gauß-Kronrod berechnen. Aus diesem Grund und der ungefähr gleichen Genauigkeit sind diese beiden Methoden gleich leistungsstark und sollten demzufolge den Vorzug erhalten. Bei den nicht dargestellten Integrationstechniken hat sich herausgestellt, dass bei der Levin Methode der Rechenaufwand sprunghaft ab einer Helmholtz Zahl von  $He \approx 15$  ansteigt und anschließend deutlich größer als bei den dargestellten Methoden ist. Aber auch bei kleineren Helmholtz Zahlen ist diese Methode um ca. 50% langsamer. Die benötigte Rechenzeit mit der Newton-Cotes Technik steigt kontinuierlich mit wachsenden Helmholtz Zahlen an und ist auch bei kleinen Werten größer als die gezeigten Methoden. Bei der numerischen Integration mit der Monte-Carlo-Technik sind die Rechenzeiten nur bei sehr kleinen Helmholtz Zahlen bis ca. 6 gering, danach steigen auch diese stark an. Darüber hinaus weisen diese Techniken eine höhere Schwankung bei den Rechenzeiten auf als die vier gezeigten Methoden. Die Ursache hierfür liegt an den implementierten numerischen Integrationsverfahren in Mathematica. Anhand der vorgegebenen numerischen Genauigkeit werden innerhalb von Mathematica Iterationen durchgeführt bis diese erreicht wurde. Allerdings ist die Anzahl von Iterationen auch begrenzt, sodass die Rechenzeit nicht beliebig lang werden kann. Grundsätzlich wurde angestrebt, eine möglichst akkurate Berechnung durchzuführen und dafür eine höhere Rechenzeit in Kauf zu nehmen. Die hohe Anzahl von Iterationen ist hauptsächlich nahe den Nulldurchgängen notwendig, um die möglichst genaue numerische Lösung zu ermitteln. Hierbei ist die Lage der Nulldurchgänge von Bedeutung, weil die 1001 Feldpunkte entlang der z-Achse vorgegeben werden und sich die Nulldurchgänge somit in einigen Fällen näher an den Feldpunkten befinden. Aus diesem Grund kommt es bei einzelnen Kombinationen aus dem Radius des Ultraschallwandlers und der Frequenz zu einem höheren Rechenaufwand

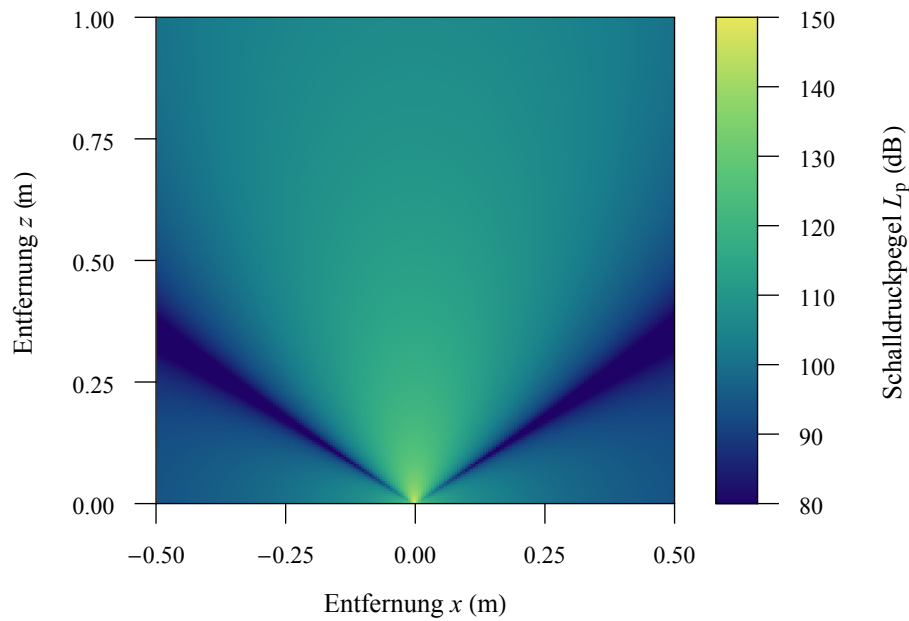


**Abbildung 3.10.:** Die benötigten Rechenzeiten zur numerischen Integration mit den implementierten Integrationstechniken in Mathematica.

um die genauere Lösung zu bestimmen. Die Genauigkeit ist bei allen deterministischen Methoden auch gleich groß und es kann demzufolge die Rechenzeit zum Vergleich der Leistungsfähigkeit der einzelnen Methoden verwendet werden.

Neben der Berechnung des Schallfeldes entlang der z-Achse, wird auch das Schallfeld in der xz-Ebene (Abbildung 2.3) mit den Integrationstechniken berechnet. Dieses Feld erstreckt sich in einem Bereich von  $x = -0,5 \text{ m}$  bis  $x = 0,5 \text{ m}$  und  $z = 0 \text{ m}$  bis  $z = 1,0 \text{ m}$  und hat jeweils eine Schrittweite von  $5 \text{ mm}$ , wodurch 40401 Feldpunkte in der Ebene berechnet werden. In der Abbildung 3.11 wird das Schallfeld exemplarisch für einen Ultraschallwandler mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  dargestellt. Bei dieser numerischen Integration wurde die Methode nach Gauß-Kronrod verwendet und anschließend wurde der Schalldruckpegel nach der Gleichung (2.46) berechnet. Dazu wurden die physikalischen Größen  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_0 = 343,3 \text{ m s}^{-1}$  und die Schnelle in Normalenrichtung auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers mit  $v_n = 1 \text{ m s}^{-1}$  verwendet.

In dieser Abbildung wird eine typische Abstrahlcharakteristik eines kreisförmigen Kolbenstrahlers gezeigt. Diese Darstellungsform eignet sich eigentlich besonders gut für unsymmetrische und beliebig erregte Schallquellen. Die üblichen Darstellungen (Abbildung 2.4 und 2.5) sind zwar auch sehr gut zur Beschreibung der charakteristischen Schallwellenausbreitung geeignet, jedoch ist es bei einer Störung der Symmetrie notwendig das Feld komplett zu erfassen. Darüber hinaus wird die zweidimensionale Darstellung für die Berechnung des Schalldrucks innerhalb des Nahfeldes benötigt, weil es im Gegensatz zum Fernfeld keine Beschreibungsform gibt. Aus diesem Grund wurden auch Berechnungen von zweidimensionalen Schnitten aus einem dreidimensionalen Feld durchgeführt. Hierbei werden die oben beschriebenen numerischen Integrationstechniken zur Lösung des Integrals verwendet und es werden vier Testfälle ausgewählt. Diese Testfälle orientieren sich an den Geometrien und Frequenzen, die im Kapitel 4 verwendet werden. Daher haben die Testfälle die folgenden zwei Radien  $a = 6,4 \text{ mm}$  bzw.  $a = 18,2 \text{ mm}$  und die zwei Frequenzen  $f = 40 \text{ kHz}$  bzw.  $f = 80 \text{ kHz}$ . Im Gegensatz zu den analytischen Lösungen gibt es im Allgemeinen keine Möglichkeit die Lösungsergebnisse zu verifizieren. Jedoch waren die Ergebnisse der numerischen Integration hervorragend und somit soll davon ausgegangen werden, dass diese auch für die dreidimensionale Berechnung geeignet sind und zuverlässige Ergebnisse liefern. Bei der numerischen Berechnung unterscheiden sich die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren nur unwesentlich, was auf eine gute Konvergenz mit einem kleinen Fehler hindeutet. Es haben sich jedoch deutliche Unterschiede in den benötigten Rechenzeiten (Tabelle 3.1) ergeben.



**Abbildung 3.11.:** Dreidimensionales Schallfeld in der xz-Ebene für einen kreisförmigen Kolbenstrahler mit dem Radius  $a = 6,4\text{mm}$  und der Frequenz  $f = 40\text{kHz}$ , welches mit der numerischen Integrationstechnik von Gauß-Kronrod berechnet wurde.

**Tabelle 3.1.:** Rechenzeiten zur numerischen Integration eines dreidimensionalen Schallfeldes in der Ebene für 40401 Feldpunkte. Die Quelle ist ein kreisförmiger Kolbenstrahler mit dem Radius  $a$  und der erregenden Frequenz  $f$ .

Methode	$a = 6,4\text{mm},$ $f = 40\text{kHz}$	$a = 6,4\text{mm},$ $f = 80\text{kHz}$	$a = 18,2\text{mm},$ $f = 40\text{kHz}$	$a = 18,2\text{mm},$ $f = 80\text{kHz}$
Gauß-Kronrod	43,8 s	84,0 s	140,0 s	543,3 s
Lobatto-Kronrod	59,4 s	168,2 s	376,3 s	2228,8 s
Newton-Cotes	12537,9 s	40557,3 s	84573,5 s	289572,2 s
Clenshaw-Curtis	223,7 s	813,3 s	2648,1 s	15672,0 s
Clenshaw-Curtis-Oszillation	224,7 s	913,6 s	2700,3 s	9482,7 s
Levin	261,8 s	976,3 s	2281,6 s	10368,6 s
Monte-Carlo	747,5 s	2609,4 s	5616,0 s	12355,3 s

Im Gegensatz zu den Rechenzeiten entlang der z-Achse zeigt sich, dass die zwei Gauß'schen Integrations-techniken signifikant kürzere Rechenzeiten benötigen. Hierbei hat sich für alle vier Testfälle besonders die Berechnung mit der Methode von Gauß-Kronrod herausgestellt. Leider war die Berechnung mit der Clenshaw-Curtis-Oszillations Methode für dreidimensionale Fälle nicht mehr so effektiv wie bei der Be-rechnung entlang der z-Achse. Die Technik nach Newton-Cotes ist verglichen mit den anderen Methoden besonders rechenintensiv. Insbesondere der letzte Testfall zeigt, dass diese Methode zum Berechnen des Rayleigh Integrals eher ungeeignet ist. Verglichen mit der besten Integrationstechnik nach Gauß-Kronrod ist die Methode nach Newton-Cotes um einen Faktor 500 langsamer.

Die gezeigten numerischen Integrationstechniken eignen sich hervorragend zur genauen Berechnung der Schallfeldabstrahlung von ebenen Kolbenstrahlern. Hierbei müssen die abstrahlenden Flächen des Ultra-schallwandlers für die Integration entsprechend des Rayleigh Integrals parametrisiert und anschließend integriert werden. Die berechneten Ergebnisse entsprechen äußerst gut den analytischen Lösungen und es existiert ein sehr kleiner Fehler zwischen den numerischen Ergebnissen und den analytischen Lösun-



---

gen. Aus diesem Grund wird davon ausgegangen, dass mit den Methoden für die allgemeine Anwendung beliebiger Geometrien und Dimensionen sehr präzise Ergebnisse berechnet werden können. Allerdings ergeben sich auch zwei Nachteile mit den numerischen Integrationstechniken in Mathematica. Zum einen muss für die zu integrierende Fläche eine parametrisierte Darstellung gefunden werden, was für den allgemeinen Fall nicht immer leicht zu lösen ist. Zum anderen ist der Rechenaufwand groß, was sich gerade bei der Berechnung des mehrdimensionalen Schallfeldes herausgestellt hat.

---

### 3.4 Simulation der Schallwellenausbreitung von Ultraschallwandlern in einer unendlich ausgedehnten Ebene

---

In dem vorherigen Kapitel wurden die numerische Integrationstechniken in Mathematica untersucht. Mithilfe der numerischen Integrationsmethoden konnten für einen kreisförmigen Kolbenstrahler das Rayleigh Integral gelöst werden. Hierbei war die Schnelle in Normalenrichtung über die Oberfläche konstant verteilt. Durch die numerische Integration konnte zwar dieses Integral und somit auch die Schallwellenausbreitung sehr genau berechnet werden, jedoch war dafür die Berechnung relativ zeitaufwendig. Darüber hinaus war die Berechnung auf eine kreisförmige Fläche beschränkt. Auf die gleiche Weise können zwar auch andere einfache Flächen berechnet werden, jedoch erweist sich die Parametrierung von komplexen Strukturen als schwierig. Außerdem ist das Rayleigh Integral für komplexe Formen aufwendig zu lösen. Um die Nachteile der numerischen Integration in Mathematica auszugleichen und gleichzeitig aber eine hohe Genauigkeit beizubehalten soll eine Integrationsmethode zum Lösen des Rayleigh Integrals selbst implementiert werden. Hierbei ist das Ziel eine beliebige Form des Kolbenstrahlers mit einer beliebigen Erregung hinsichtlich der Amplitude als auch der Phasenlage zu ermöglichen. Des Weiteren wird ein schneller Programmcode angestrebt, mit dem eine Vielzahl von Feldpunkten in einer kurzen Zeit berechnet werden kann.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst das Modell mathematisch erfasst und dabei das Rayleigh Integral in eine diskrete Form überführt. Danach erfolgt die Diskretisierung der Oberfläche des Kolbenstrahlers mit einem Programm, welches die Fläche trianguliert. Mithilfe der triangulierten Flächen und der Gauß'schen Integrationsmethode wird die Schallfeldberechnung durchgeführt. Hierbei werden sowohl die Anzahl der triangulierten Elemente als auch die Ordnung der numerischen Integration hinsichtlich der Konvergenz und des resultierenden Fehlers untersucht. Anhand eines parallel entwickelten Programmcodes wird die Berechnung sowohl auf der CPU als auch auf GPU absolviert. Mittels der parallelen Berechnung soll die benötigte Rechenzeit deutlich reduziert werden und dadurch die Möglichkeit existieren, große Volumen mit einer Vielzahl von Feldpunkten zu berechnen. Dadurch soll gewährleistet werden, dass hochaufgelöste und großvolumige Schallfelder simuliert werden können.

---

#### 3.4.1 Mathematische Formulierung

---

Die mathematische Modellbildung basiert auf der Gleichung (2.38) für reale physikalische Feldgrößen und der Gleichung (2.40), wenn der Schalldruck auf die Oberfläche des erregenden Ultraschallwandlers bezogen wird. Bei der zweiten Gleichung wird die Schallschnelle als konstant angesehen und stellt damit eine Einschränkung dar. Um aber die Allgemeinheit zu berücksichtigen, muss für die Berechnung die erste Gleichung verwendet werden, da bei dieser die Verteilung der Schallschnelle in Normalenrichtung auf der Oberfläche der akustischen Apertur vorgenommen wird. Deshalb wird zunächst die Modellbildung für die allgemeine Form dargestellt und anschließend auf die referenzierte Formel überführt. Um eine schnelle Berechnung zu gewährleisten, wird das Integral diskretisiert und die gesamte Fläche des Integrals in kleinere Flächen untergliedert. Bei dieser Diskretisierung stehen verschiedene Methoden und Formen zur Auswahl. Aufgrund der besonderen Bedeutung der Diskretisierung auf die Genauigkeit der Lösung wird im folgenden Abschnitt darauf gesondert eingegangen. Jedoch können die Gleichungen für das Modell nicht ohne die Form der vorgenommenen Diskretisierung hergeleitet werden, sodass an

dieser Stelle schon die Art und Form festgelegt wird. Hierbei wird die Oberfläche des Ultraschallwandlers durch unstrukturierte Dreiecke approximiert. Deshalb lassen sich beliebige Formen der akustischen Oberfläche sehr genau durch die triangulierten Elemente anpassen. In einem ersten Schritt werden die Integrale in eine Summe mit einer beliebigen Anzahl von Elementen diskretisiert. Dadurch wird die Gleichung (2.38) in

$$p(\vec{r}_p) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \sum_{m=1}^M v_{nm} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_{qm})}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_{qm})} \Delta F_m \quad (3.10)$$

überführt. In dieser diskreten Form des Rayleigh Integrals wird die Fläche des Kolbenstrahlers durch die einzelnen Elementflächen  $\Delta F_m$  gebildet. Dabei sind  $r_{qm}$  gerade die Punkte auf dem jeweiligen Flächenelement und  $v_{nm}$  die Schallschnelle in Normalenrichtung für das jeweilige Element. Es kann nun angenommen werden, dass die Schnelle auf jedem einzelnen Element nahezu konstant ist. Das liegt daran, dass jedes Element beliebig verkleinert werden kann und sich dann eine nahezu konstante Verteilung über das Element ergibt [34]. Des Weiteren kann durch die Multiplikation der Fläche und der Schnelle eine neue Größe eingeführt werden, welche dem Schallfluss entsprechen würde. Anhand dieser Zusammenfassung von der Fläche und der Schnelle kann die Schnelle im Endeffekt vernachlässigt werden, wenn sie in der Fläche des Elements berücksichtigt wird. Dadurch kann auch die Gleichung (2.40) mit dem referenzierten Schalldruck auf der Oberfläche für den allgemeinen Fall verwendet werden. Hierbei wird die Schallschnelle auf einen beliebigen Wert normiert und die Schallschnelle aller Elemente auf diesen Wert bezogen. Anschließend werden die Schallschnellen mit den Flächenelementen multipliziert. Somit geht das Rayleigh Integral für einen Kolbenstrahler in die diskrete Form

$$\frac{p(\vec{r}_p)}{p_{\text{ober}}} = \frac{jk}{2\pi} \sum_{m=1}^M \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_{qm})}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_{qm})} \Delta F_m \quad (3.11)$$

über. Diese dargestellte Variante beinhaltet zunächst eine konstante Verteilung der Schallschnelle, jedoch lässt sich durch diese Multiplikation mit den skalierten Schnellen eine beliebige Verteilung realisieren. Die Verteilung kann dabei sowohl in der Amplitude als auch in der Phasenlage variieren, vorausgesetzt, dass das gezeigte Flächenelement auch komplexwertig werden kann.

Bei der Analyse der numerischen Integrationstechniken (Kapitel 3.3) hat sich herausgestellt, dass die Gauß'sche Integration hervorragende Ergebnisse in Bezug auf die analytischen Lösungen darstellt. Darüber hinaus benötigte diese Methode die geringste Rechenzeit. Aus diesem Grund wird die Integration über die einzelnen Elemente mit einer Gauß'schen Integration durchgeführt. Dazu wird der vorherige Ausdruck erweitert, sodass sowohl Wichtungen als auch weitere Stützstellen für die einzelnen Elemente eingeführt werden. Diese Stützstellen werden im Allgemeinen als Gauß'sche Punkte (GP) bezeichnet. Für die Dreiecke wurden bezüglich der Verteilung dieser Punkte und den dazugehörigen Wichtungen Berechnungen durchgeführt [63, 64], sodass diese Verteilungen in die Summe eingefügt werden können. Die Parameter für die Gauß'sche Integration über die Dreiecke können aus der Tabelle 3.2 (Kapitel 3.4.3) entnommen werden. Durch die Berücksichtigung dieser Integrationstechnik ergibt sich die zuvor entwickelte Summe zu

$$\frac{p(\vec{r}_p)}{p_{\text{ober}}} = \frac{jk}{2\pi} \sum_{n=1}^N \Delta F_n \sum_{m=1}^M \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_{qnm})}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_{qnm})} w_m. \quad (3.12)$$

In dieser Gleichung ist  $w_m$  die Wichtung des jeweiligen Stützpunktes auf der Oberfläche eines Elements. Die Stützpunkte sind  $\vec{r}_{q_{nm}}$  und werden nach

$$\vec{r}_{q_{nm}} = (\alpha_{\text{quad}}x_{1m} + \beta_{\text{quad}}x_{2m} + \gamma_{\text{quad}}x_{3m})\vec{e}_x + (\alpha_{\text{quad}}y_{1m} + \beta_{\text{quad}}y_{2m} + \gamma_{\text{quad}}y_{3m})\vec{e}_y + (\alpha_{\text{quad}}z_{1m} + \beta_{\text{quad}}z_{2m} + \gamma_{\text{quad}}z_{3m})\vec{e}_z \quad (3.13)$$

berechnet [63]. Die Koordinatenpaare  $(x_{1m}, y_{1m}, z_{1m})$ ,  $(x_{2m}, y_{2m}, z_{2m})$  und  $(x_{3m}, y_{3m}, z_{3m})$  sind die drei Eckpunkte des dreieckigen Elements  $m$ . Die Faktoren  $\alpha_{\text{quad}}$ ,  $\beta_{\text{quad}}$  und  $\gamma_{\text{quad}}$  geben die Lage der lokalen Stützstellen innerhalb des Dreiecks an. Anschließend werden die jeweiligen Stützstellen mit der dazugehörigen Wichtung  $w_m$  beziehungsweise  $w_{\text{quad}}$  versehen. Dadurch kann das ursprüngliche Integral, welches durch eine beliebige Anzahl von Dreiecken approximiert wurde, genauer berechnet werden. Das liegt hauptsächlich an der höheren Ordnung der Gauß'schen Quadratur. Der Einfluss der Ordnung wird genauso wie die Anzahl der Dreiecke auf Genauigkeit der Lösung untersucht (Kapitel 3.4.4). Im nächsten Abschnitt wird als erstes die Diskretisierung der Oberfläche von dem Kolbenstrahler vorgenommen. Danach erfolgt die Umsetzung des Programmcodes, in dem dieser mathematische Zusammenhang implementiert ist.

### 3.4.2 Triangulierung der Ultraschallwandler

Die Gittererzeugung ist ein wichtiger Schritt bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen oder zur numerischen Integration von Integralen. Die lokale und globale Qualität eines Gitters beeinflusst sehr stark die Genauigkeit der Simulationsergebnisse. Neben der Qualität des Gitters ist es wichtig, dass das Gitter möglichst gut die Geometrie des Körpers oder der Flächen abbildet. Im Gegensatz zu dreidimensionalen Körpern, erfolgt die Diskretisierung von Flächen im Wesentlichen mit dreieckigen oder viereckigen Grundformen [65]. In einigen wenigen Sonderfällen werden auch andere Grundformen wie Sechsecke [66] verwendet. Um eine möglichst genaue Annäherung an eine beliebige Form des Kolbenstrahlers zu erreichen, wird die Geometrie mit unstrukturierten Gittern approximiert. Für diese Art der Gittererzeugung gibt es eine Vielzahl von Programmen, zu denen unter anderem Gmsh, Triangle [67] oder DistMesh [13] gehören. Bei der Untersuchung verschiedener Programme hinsichtlich der Qualität der Gitter [68] konnte gezeigt werden, dass die verwendeten Programme mit Ausnahme von Triangle sehr gute Gittereigenschaften aufweisen. Am besten war jedoch das Programm DistMesh [13], welches ein Paket für MATLAB ist. Aufgrund der sehr guten Gittereigenschaften, die dieses Programm aufweist und der damit verbundenen höheren Genauigkeit, wird dieses zur Triangulierung der in dieser Arbeit verwendeten Flächen benutzt.

Häufig werden die generierten Gitter der Geometrie hinsichtlich ihrer Qualität untersucht. Es werden in den meisten Fällen gleichseitige Dreiecke angestrebt und es gibt bei der Triangulierung viele Qualitätskriterien [69, 70] um diese Dreiecke zu untersuchen und zu bewerten. Dabei werden zum einen Winkelabhängigkeiten, das Verhältnis zwischen größter Seite zu den anderen Seiten oder Flächenabhängigkeiten untersucht. Die Verfahren zur Bestimmung der Gitterqualität sind im Allgemeinen sehr gleichbedeutend und es lässt sich meist mit einem Verfahren ermitteln, ob ein Gitter von guter Qualität ist [71]. Jedoch hat sich die Untersuchung hinsichtlich der Verhältnisse zwischen dem Innenradius  $r_i$  und dem Außenradius  $r_a$  des Dreiecks etabliert [13]. In der Qualität des Gitters nach

$$q_{\text{drei}} = 2 \frac{r_i}{r_a} = \frac{(a_{\text{drei}} + b_{\text{drei}} - c_{\text{drei}})(a_{\text{drei}} + c_{\text{drei}} - b_{\text{drei}})(b_{\text{drei}} + c_{\text{drei}} - a_{\text{drei}})}{a_{\text{drei}} b_{\text{drei}} c_{\text{drei}}} \quad (3.14)$$

ist ersichtlich, dass die zwei Radien durch die Seitenlängen des Dreiecks ( $a_{\text{drei}}$ ,  $b_{\text{drei}}$ ,  $c_{\text{drei}}$ ) beschrieben werden. Die Qualität des Dreiecks wird dabei als  $q_{\text{drei}}$  angegeben und kann die Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Im idealen Fall eines gleichseitigen Dreiecks wäre  $q_{\text{drei}} = 1$  und wenn  $q_{\text{drei}} = 0$  wäre,



---

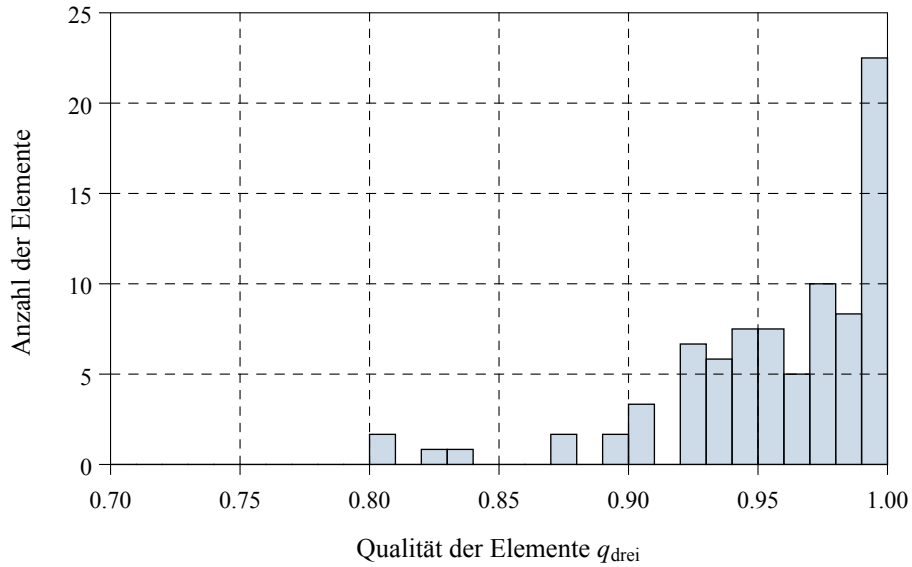
dann würde kein Dreieck vorliegen, weil sich in diesem Fall alle Punkte des Dreiecks auf einer Geraden befinden. Wenn  $q_{\text{drei}} \geq 0,5$  [13, 69] ist es ein akzeptables Gitter und wenn  $q_{\text{drei}} \geq 0,75$  ist es ein sehr gutes Gitter [13].

Die Simulationen werden grundsätzlich für Kolbenstrahler, welche eine kreisförmige Fläche besitzen, durchgeführt. Bei dieser Wahl der Geometrie existiert jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit und es könnten für andere Untersuchungen beliebige weitere Formen verwendet werden. Die Diskretisierung ist somit unabhängig von der Wahl der Geometrie des Ultraschallwandlers. Dennoch wurden kreisförmige Flächen ausgewählt, weil zum einen eine Vielzahl von erhältlichen Ultraschallwandler kreisrund sind und zum anderen wegen der vorhandenen analytischen Lösungen, mit denen das Modell theoretisch verifiziert werden kann.

Mithilfe des DistMesh-Algorithmus wird die Fläche des Kolbenstrahlers mit verschiedenen Elementanzahlen diskretisiert. Es wird dabei im nächsten Abschnitt untersucht, wie sich die Anzahl, neben der Ordnung der Integration, auf die Ergebnisse des Schalldruckpegels verhält. Die Anzahl der Elemente nimmt nicht in einem regelmäßigen Abstand zu, sondern wird entsprechend der geeigneten Diskretisierung des Kreises gewählt. Dadurch existiert eine ungleichmäßige Zunahme der Anzahl von Elementen, die bei 10 Elementen beginnt und bei 2042 Elementen endet. Grundsätzlich wird bei dieser Diskretisierung ein möglichst akkurates lokales Gitter angestrebt. Alle verwendeten Gitter werden hinsichtlich ihrer Qualität der Dreiecke untersucht. Das verwendete Qualitätsmerkmal beruht auf der Gleichung (3.14) und bezieht sich auf alle Dreiecke des jeweiligen Gitters.

Nach diesem Qualitätskriterium wurde festgestellt, dass die Gittererzeugung in allen Fällen hervorragend abgelaufen ist. Die Qualität der Dreiecke  $q_{\text{drei}}$  ist in allen Fällen nie kleiner als 0,75, wodurch für alle durchgeführten Triangulationen der Fläche ein jeweiliges sehr gutes Gitter gewährleistet ist. Sie ist meistens sogar hervorragend, sodass nahezu alle Dreiecke des Gitters gleichseitig sind. Dadurch wird eine hervorragende Ausgangssituation zur numerischen Integration erreicht. Exemplarisch wird eine Auswertung des untersuchten Gitters für eine Anzahl von 100 Dreiecken in der Abbildung 3.12 gezeigt. Aus dieser Graphik kann entnommen werden, dass die meisten Dreiecke eine Qualität  $q_{\text{drei}} \geq 0,92$  besitzen. Das schlechteste Dreieck hat hierbei eine Qualität von  $q_{\text{drei}} = 0,8$ , welches immer noch ein sehr gutes Element zur Integration darstellt. Aufgrund der hohen Qualität aller Elemente für diesen Fall ist es ersichtlich, dass sich dieses Gitter im Gesamten hervorragend zur Integration und somit auch zur Schallfeldsimulation eignet. Die übrigen Gitter haben eine vergleichbare Qualität, jedoch werden sie der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt.

Nicht nur die Qualität des Gitters ist von Bedeutung, sondern auch die Approximation des Gitters an die originalen Flächen. Aus diesem Grund wurde überprüft, wie genau die kreisförmige Fläche durch die Gitteranzahl angenähert wird. Grundsätzlich wird der Kreis durch ein Polygon abgebildet, welches durch die gesamten Dreiecke des Gitters gebildet wird. Die Kontur der äußersten Punkte von den Dreiecken bilden dabei das Polygon. Die direkte Erfassung der Unterschiede zwischen der exakten Form und der angenäherten Form ist nicht trivial zu lösen. Aus diesem Grund wurde bei der Erstellung der Gitter darauf geachtet, dass sich die Punkte des Polygons direkt auf der Kontur des Kreises oder innerhalb des Kreises befinden. Dadurch ist es möglich, einen Vergleich zwischen den Flächen der zwei Geometrien vorzunehmen. Die Fläche über das Polygon wird bei zunehmender Anzahl von Dreiecken größer, weil der Kreis durch die höhere Anzahl von Dreiecken besser approximiert wird. Jedoch kann die Fläche des Polygons nie größer als die Fläche des Kreises werden, weil alle Punkte der Dreiecke nicht außerhalb des Kreises liegen. Im Idealfall würde Fläche des Kreis durch die Summe aller Dreiecke, welche dem Polygon entsprechen, komplett abgedeckt werden. Zur Abschätzung der Genauigkeit von der approximierten Geometrie wird ein Verhältnis zwischen den Flächen des Kreises und den Dreiecken gebildet. Dieses



**Abbildung 3.12.:** Qualität der triangulierten Elemente mit dem DistMesh-Algorithmus [13] für einen Kreis mit 100 Elementen. Das verwendete Qualitätsmerkmal ist das Verhältnis zwischen dem Innen- und Außenradius nach der Gleichung (3.14).

Verhältnis beschreibt die Qualität des gesamten Gitters in Hinblick auf die Annäherung des Kreises und wird durch die Gleichung

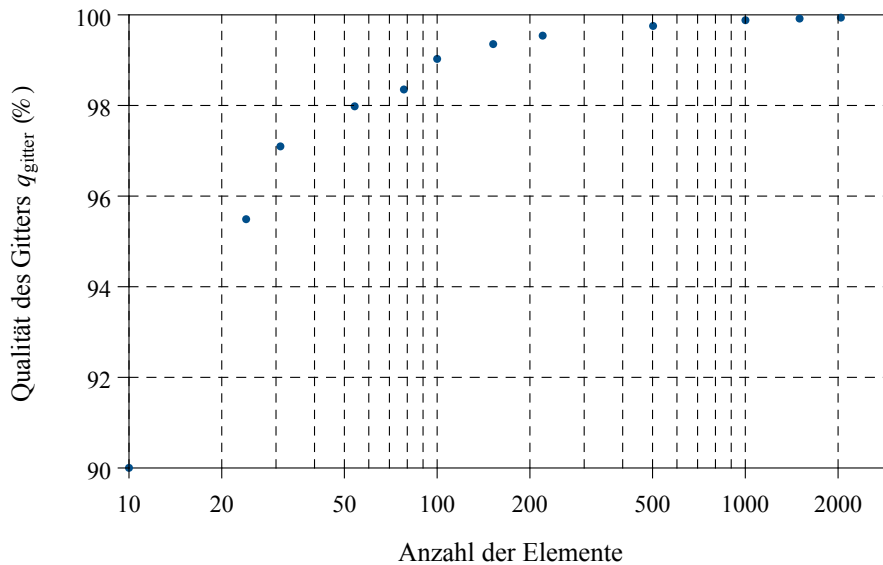
$$q_{\text{gitter}} = \frac{\sum_{m=1}^M \Delta F_m}{\pi r^2} \quad (3.15)$$

beschrieben. Der Grenzwert dieses Verhältnisses ist 100% und entspricht einer perfekten Approximation des Gitters an den Kreis. Ansonsten nähert sich das Verhältnis der Flächen mit zunehmender Anzahl an diesen Grenzwert an, wodurch eine bessere Approximation beschrieben wird. Dieses Verhältnis wurde für die zuvor ermittelten Gitter eines Kreises berechnet (Abbildung 3.13).

Die dargestellte Approximation bezieht sich zunächst auf eine rein geometrische Annäherung. Hierbei sind noch keine physikalischen Aspekte berücksichtigt, wie beispielsweise die minimale Anzahl der Knoten pro Wellenlänge oder der Belegung der Schnelle über den Ultraschallwandler. Die hier gezeigte Darstellung ist auf einen Einheitskreis referenziert und es werden durch die Erhöhung der Elementanzahl die geometrische Form besser angenähert, was aus der Abbildung 3.13 ersichtlich ist. Darüber hinaus existiert bereits bei einer Elementanzahl von 10 eine Approximation an den Kreises von  $q_{\text{gitter}} = 90\%$ . Mit weiter steigender Elementanzahl strebt die Approximation an den Kreis gegen 100%. Werden durch die physikalischen Gesetzmäßigkeiten weitere Elemente benötigt, können weitere genauere Gitter mit dem DistMesh-Algorithmus generiert werden. Anhand dieser höheren Anzahl von Dreiecken wird dann die Geometrie noch besser approximiert, jedoch wirkt sich diese Anzahl dann auch negativ auf die benötigten Rechenzeiten (Kapitel 3.4.4) aus. Dennoch ist die hier gezeigte geometrische Annäherung durch die gegebene Anzahl von Dreiecken ausreichend, um den Kreis sehr gut zu approximieren.

### 3.4.3 Implementierung des Modells in Mathematica

In den vorherigen Abschnitten wurden sowohl die mathematische Modellierung als auch die dafür notwendige Diskretisierung beschrieben. Das zuvor entwickelte Modell wird im Folgenden in Mathematica der Version 11.0 [20] implementiert. Dazu werden sequentielle und parallele Programmiertechniken



**Abbildung 3.13.:** Approximation des Kreises als triangulierte Fläche mit dem DistMesh-Algorithmus [13].

eingesetzt, um eine möglichst genaue Simulation bei einer kurzen Rechenzeit zu ermöglichen. Um Vergleiche hinsichtlich der Genauigkeit und der Rechenzeit zum parallelisierten Programmcode zu zeigen, wird zunächst ein sequentieller Programmcode entwickelt. Dieser Programmcode wird hierbei auf einer CPU umgesetzt. Die erste Form der Parallelisierung besteht darin, die vier Kerne der CPU voll auszunutzen und somit die Rechenzeit zu reduzieren. In einem weiteren Schritt wird dann die Berechnung des Schallfeldes anstatt auf der CPU auf der GPU durchgeführt. Diese Parallelisierungen lassen sich aufgrund der vorhandenen linearen Wellengleichung und somit der Möglichkeit der Superposition gut umsetzen. Der entwickelte Programmcode besteht im Wesentlichen aus fünf Teilschritten. Diese fünf Schritte sind hauptsächlich in sequentieller Art programmiert und nur die Schallfeldberechnung über das Integral nach der Gleichung (3.12) wird zum einen sequentiell und zum anderen parallel implementiert. Der prinzipielle Ablauf wird im Folgenden dargestellt. In einem ersten Schritt werden die notwendigen physikalischen Parameter und die physikalischen Abhängigkeiten für die Simulation festgelegt. Dazu werden die Frequenz, die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Dichte des Mediums vorgegeben. Die davon abhängigen Größen Kreisfrequenz  $\omega$ , Wellenlänge  $\lambda$  und die Wellenzahl  $k$  werden aus diesen Vorgaben berechnet. In dieser Simulation werden die Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$ , die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0 = 343,3 \text{ m s}^{-1}$  und die Dichte  $1,204 \text{ kg m}^{-3}$  verwendet. Die übrigen physikalischen Größen ergeben sich entsprechend aus diesen. Eigentlich könnte an dieser Stelle auch die Schnelle in Normalenrichtung vorgegeben werden, jedoch ist es sinnvoll diese erst bei der Bearbeitung der Geometrie einzuführen. Dadurch besteht, wie bereits in Kapitel 3.4.1 gesagt wurde, die Möglichkeit die Schnelle in Normalenrichtung auf der Oberfläche beliebig vorzugeben.

In dem nächsten Programmschritt werden die Feldpunkte, in denen das Schallfeld berechnet werden soll, vorgegeben. Aufgrund des dreidimensionalen Modellansatzes können beliebige Punkte in kartesischen Koordinaten gewählt werden. Diese Koordinaten werden immer in dreidimensionalen Punktepaairen definiert und bilden in ihrer Gesamtheit eine Liste aus Punktepaairen. Die Listen können auch Unterräume des dreidimensionalen Raumes abbilden, wodurch z.B. Schnittebenen oder parametrisierte Kurven verwendet werden können.

Anschließend erfolgt der dritte Programmschritt, bei dem die Geometrie des Ultraschallwandlers verarbeitet wird. Dazu werden die Daten, die mit dem DistMesh-Algorithmus erstellt wurden, in Mathematica geladen. Die diskretisierte Geometrie besteht aus einer Liste von kartesischen Koordinaten und einem Gitternetz, das angibt welche Elemente mit den jeweiligen Knoten verknüpft sind. In einem ersten Schritt wird die Liste mit den kartesischen Koordinaten mit dem Radius des Ultraschallwandlers multipliziert.

Das ist sehr gut umsetzbar, weil der diskretisierte Kreis normiert auf den Radius eins ist. Deshalb ist die Geometrie sehr einfach auf die reale Wandlergröße zu transformieren. In dieser Berechnung wird ein Ultraschallwandler mit dem Radius  $a = 6,4\text{ mm}$  verwendet. Im Anschluss werden die Koordinaten der Dreiecke berechnet und als Grundlage für die Oberflächenintegration des Wandlers verwendet. Doch zunächst wird erst noch die Fläche der Dreiecke berechnet und gegebenenfalls mit einer Schallschnelle multipliziert. Aufgrund der Schallfeldberechnung für einen Kolbenstrahler, wird eine konstante Schallschnelle mit  $v_n = 1\text{ ms}^{-1}$  angenommen.

Mit der Festlegung der physikalischen und geometrischen Parameter und der Definition der Randbedingungen kann der eigentliche Teil der Berechnung erfolgen. Die Grundlage der Berechnung bildet die Gleichung (3.12), bei der das Rayleigh Integral in eine Summe überführt wird. Die drei Quellvektoren entsprechen gerade den drei Koordinatenpaaren des Dreiecks. Die inneren Punkte des jeweiligen Dreiecks werden mit Gauß'schen Quadratur berechnet [63, 64], wodurch mit einer höheren Ordnung im Allgemeinen ein exakteres Ergebnis ermittelt werden kann. Die Parameter der Gauß'schen Quadratur können aus der Tabelle 3.2 entnommen werden.

**Tabelle 3.2.:** Parameter zur numerischen Integration mit der Gauß'schen Quadratur für Dreiecke [63, 64]

Ordnung	Gaußsche Punkte	$w_{\text{quad}}$	$\alpha_{\text{quad}}$	$\beta_{\text{quad}}$	$\gamma_{\text{quad}}$
1	1	1,00000000	0,33333333	0,33333333	0,33333333
2	3	0,33333333	0,66666667	0,16666667	0,16666667
3	4	-0,5625000	0,33333333	0,33333333	0,33333333
		0,52083333	0,60000000	0,20000000	0,20000000
4	6	0,22338159	0,10810302	0,44594849	0,44594849
		0,10995174	0,81684757	0,09157621	0,09157621
5	7	0,22500000	0,33333333	0,33333333	0,33333333
		0,13239415	0,05971587	0,47014206	0,47014206
		0,12593918	0,79742699	0,10128651	0,10128651

Die Tabelle gibt die Gauß'sche Quadratur bis zur fünften Ordnung an. Ebenso wie bei der Diskretisierung der Fläche, kann auch die Ordnung erhöht werden und dadurch die Genauigkeit verbessert werden. Im Gegensatz zur Diskretisierung ist es aber mit einer höheren Ordnung nicht möglich, die Geometrie besser zu approximieren. Der Vorteil der Verwendung höherer Quadraturen ist die schnelle und effektive Erhöhung der Knotenanzahl über die Fläche des Kolbenstrahlers. Zwar kann nicht die Geometrie besser angepasst werden, es zeigt sich aber ein besseres Verhalten für die physikalischen Größen. Gerade bei der Abstrahlung von Ultraschallwellen ist eine große Anzahl von Knoten pro Wellenlänge hilfreich, wenn die Lösung möglichst genau werden soll.

Der wesentliche Aufwand ist die Berechnung der Euklidischen Distanz innerhalb der Summe entsprechend der Gleichung (3.9). Bei der Berechnung der Green'schen Funktion werden dann diese Distanzen nur noch eingefügt und mit der dazugehörigen Wichtung  $w_m = w_{\text{quad}}$  multipliziert. Die Vielzahl der GP werden durch die Permutation der drei Parameter  $\alpha_{\text{quad}}$ ,  $\beta_{\text{quad}}$  und  $\gamma_{\text{quad}}$  gebildet. Anschließend werden alle möglichen Varianten mit den drei Koordinatenpaaren entsprechend der Gleichung (3.9) zur Berechnung der Euklidischen Distanz verwendet. Dann kann die Berechnung der Summe für ein Dreieck erfolgen. Abschließend werden die gebildeten Summen über die Dreiecke mit ihren Flächenelementen, bzw. zuzüglich noch der Verteilung der Schallschnelle, gewichtet und es wird für die Gesamtheit der Dreiecke die Summe gebildet. Das Ergebnis der zweiten Summe entspricht dem Schalldruck in dem vorgegeben Feldpunkt und die Berechnung wird für die übrigen Feldpunkte wiederholt.

Während das sequentielle Vorgehen sofort ersichtlich ist, gibt es für die parallele Berechnung zwei Möglichkeiten. Es kann entweder die Parallelisierung bezüglich der Quelle erfolgen oder aber für die Feldpunkte durchgeführt werden. Diese Wahl ist durch die Reziprozität des Senders und Empfängers beziehungsweise des Feldpunkts möglich. Die effizientere Variante wird durch die Menge der Quellen

---

oder der Feldpunkte bestimmt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass es im Wesentlichen mehr zu berechnende Schalldrücke im Feld als Quellen gibt, sodass die Parallelisierung bezüglich der Feldpunkte vorgenommen wird.

Bei der Verwendung der vier Kerne der CPU erfolgt die Berechnung von vier Feldpunkten simultan. Dadurch soll sich eine kürzere Rechenzeit ergeben. Alternativ wird das beschriebene Vorgehen auf der GPU durchgeführt. Die verwendete Graphikkarte hat zwar bei Weitem nicht die Taktrate der CPU, jedoch besitzt diese 1152 Recheneinheiten. Der geschriebene Programmcode unterscheidet sich jedoch grundsätzlich von den anderen zwei Varianten, weil dieser Programmabschnitt mit der speziellen Programmier Technik der Compute Unified Device Architecture (CUDA) durchgeführt werden muss. Das notwendige Programmgerüst wird von Mathematica bereitgestellt, jedoch wird der allgemeine Ablauf in CUDA programmiert und anschließend kompiliert. Danach ist der geschriebene Programmabschnitt ähnlich zu einer Funktion in Mathematica. In diese Funktion werden die zuvor beschriebenen physikalischen und geometrischen Parameter, die diskretisierte Fläche und die Feldpunkte übergeben. Nach dem Abschluss der Simulation werden fünf Listen ausgegeben, wovon drei die kartesischen Koordinaten des Feldpunktes und zwei für den realen und imaginären Anteil des Schalldrucks in diesem Punkt sind.

Der letzte Schritt für die drei erstellten Programme ist wieder identisch. Hierbei werden zunächst die berechneten Daten aufgearbeitet. Es wird dazu der absolute Schalldruck und der Schalldruckpegel nach der Gleichung (2.46) aus den Simulationsergebnissen berechnet. Anschließend werden diese Werte den Koordinaten der Feldpunkte zugewiesen und es kann somit die Lösung graphisch dargestellt werden.

Die Umsetzung des theoretischen Modells wurde in diesem Abschnitt, ohne explizit auf den Programmcode einzugehen, in den Grundzügen erläutert. Es wurden drei verschiedene Programmcodes entwickelt, wovon zwei parallelisiert sind. Das grundsätzliche Vorgehen ähnelt sich in den drei Varianten und unterscheidet sich nur in der implementierten Berechnungsmethode für die Schallfeldsimulation. In dem nächsten Abschnitt wird der Programmcode verifiziert, indem die berechneten Schalldrücke mit den analytischen Lösungen verglichen werden.

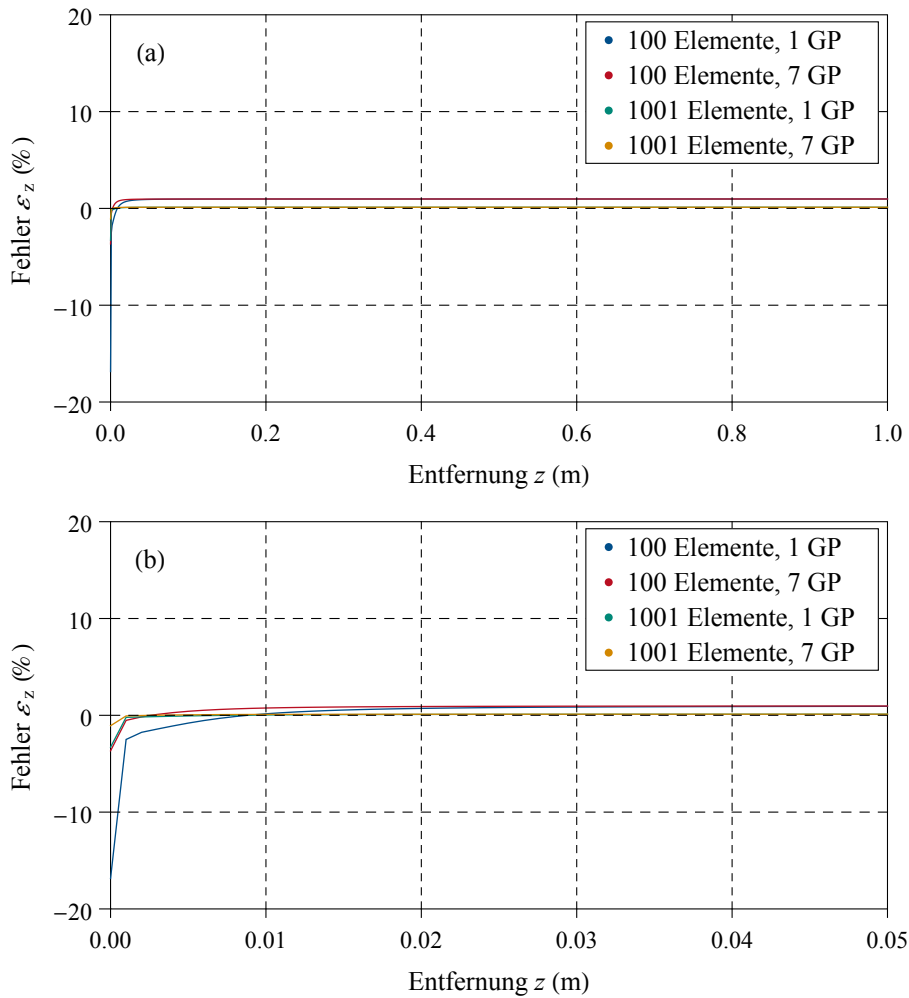
---

#### 3.4.4 Auswertung der erstellten Programme

---

In diesem Abschnitt wird das zuvor entwickelte Programm hinsichtlich des Fehlers untersucht und eine Aussage getroffen, für welche Diskretisierungen und Gauß'schen Quadraturen die Lösungen konvergiert sind. Die Fehleranalyse beruht dabei auf den zu beschreibenden geometrischen und physikalischen Größen. Bei dieser Untersuchung wurde in der selben Form, wie bei den Simulationsprogrammen (Kapitel 3.2.1 und 3.2.2) und bei der numerischen Integration (Kapitel 3.3), vorgegangen. Dazu wurde der Fehler entlang der z-Achse für 1001 Feldpunkte, welche bei  $z_p = 0$  m beginnen und bei  $z_p = 1$  m enden, berechnet. Der Fehler  $\varepsilon_z$  entspricht dabei den Unterschied zwischen der Berechnung und der analytischen Lösung eines Kolbenstrahlers entlang der z-Achse und er wird nach der Gleichung (2.47) berechnet. Aufgrund der Vielzahl von den untersuchten diskretisierten Gittern und unterschiedlichen Gauß'schen Quadraturen ist eine Darstellung des Fehlers für alle untersuchten Fälle nicht möglich. Dennoch wurden vier Testfälle ausgewählt, anhand denen das grundsätzliche Verhalten und der entstehende Fehler erläutert wird. Diese vier Varianten werden in der Abbildung 3.14 gezeigt, wobei zum einen der gesamte Bereich [Abbildung 3.14 (a)] und zum anderen davon ein vergrößerter Ausschnitt von  $z_p = 0$  m bis  $z_p = 0,05$  m [Abbildung 3.14 (b)] dargestellt wird.

Die Auswahl der vier Testfälle erfolgte nach der Anzahl der Elemente und nach der Ordnung der Quadratur. Hierbei wurden zum einen 100 Elemente und 1001 Elemente ausgewählt und für diese jeweils die Quadratur mit einem und mit sieben GP vorgenommen. Anhand der Abbildungen können zwei Fehlerarten ermittelt werden. Zum einen existiert ein verhältnismäßig großer Fehler nahe der akustischen Apertur und zum anderen strebt der Fehler bei einer großen Entfernung gegen einen festen Wert. Während der Fehler nahe des Kolbenstrahlers durch eine höhere Ordnung der Quadratur deutlich verringert werden kann, hat diese genauere Berechnung keinen großen Einfluss auf die Reduzierung des Fehlers in einer größeren Entfernung. Im Gegensatz dazu verringert sich mit 1001 Elementen sowohl der Fehler



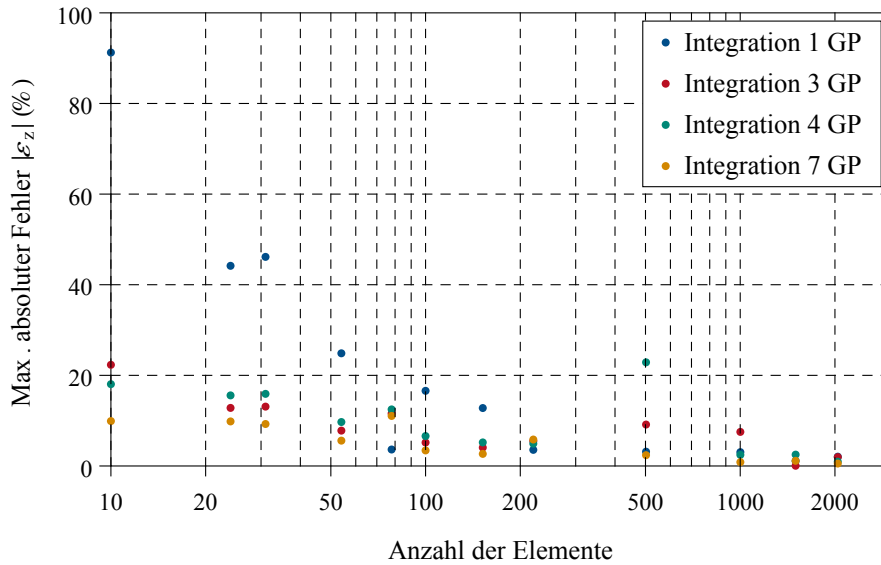
**Abbildung 3.14.:** Fehleruntersuchung des simulierten Schalldrucks von den triangulierten Kolbenstrahlern mit einer unterschiedlichen Anzahl von Gauß'schen Punkten in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Hierbei ist der Fehler entlang der  $z$ -Achse bis zu  $z_p = 1$  m (a) und  $z_p = 0,05$  m (b) dargestellt.

nahe des Kolbenstrahlers als auch in einer größeren Entfernung. Jedoch erfolgt die Berechnung in unmittelbarer Umgebung der akustischen Quelle durch die höhere Ordnung der Quadratur verhältnismäßig genauer.

Um eine bessere Aussage zu der Genauigkeit der Berechnung in Bezug auf die Diskretisierung und der Quadratur zu geben, bedarf es einer Gegenüberstellung der einzelnen Fälle. Für diesen Vergleich wird zwischen diesen zwei Fehlerarten unterschieden. Hierbei ist der eine Fehler der maximal vorhandene Fehler, welcher in unmittelbarer Umgebung des Wandlers auftritt. Der zweite Fehler existiert in einer größeren Entfernung zum Kolbenstrahler und geht gegen einen Grenzwert. Diese zwei Fehler sollen für die Konvergenz der Lösung verwendet werden. Dazu wird zunächst der maximal auftretende Fehler nahe des Kolbenstrahlers untersucht (Abbildung 3.15).

Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, dass mit zunehmender Diskretisierung die maximalen absoluten Fehler reduziert werden. Die höhere Anzahl der GP hat ebenso eine positive Auswirkung auf die Genauigkeit der berechneten Lösungen. Hierbei zeigt sich, dass die höhere Ordnung der Quadratur einen größeren Einfluss bei einer kleinen als bei einer großen Anzahl von Elementen hat. Daher wird beispielsweise der Fehler bei 10 Elementen von 91,2% bei einem GP auf 9,9% bei sieben GP gesenkt, während bei 1001 Elementen die Reduzierung nur noch von 3,1% auf 0,85% beträgt. Dieser große Unterschied





**Abbildung 3.15.:** Maximaler absoluter Fehler  $|\varepsilon_z|$  der Schallfeldberechnung für einen Kolbenstrahler entlang der z-Achse.

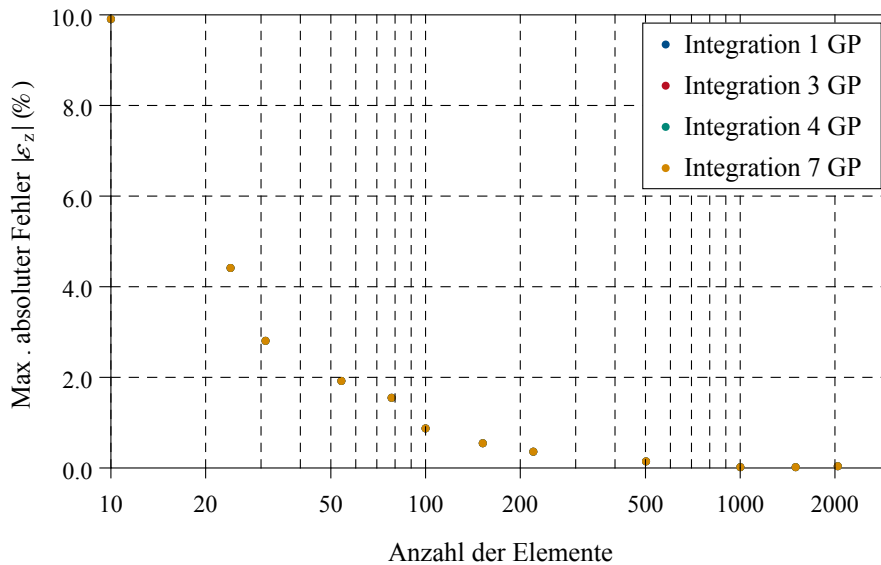
liegt an der resultierenden Anzahl der Knoten pro Wellenlänge. Die GP sind im Endeffekt die Knoten, die innerhalb eines Dreiecks liegen. Aus diesem Grund besitzt die kreisförmige Fläche mit einer höheren Quadraturordnung mehr Knoten als mit einer niedrigen. Jedoch stellt sich mit einer gewissen Anzahl von Dreiecken eine Sättigung ein. Dadurch wird mit weiter wachsender Ordnung zwar die Lösung genauer, diese wird sich aber nicht mehr gravierend auf die resultierende Lösung des Schalldrucks auswirken. Erst bei größeren Helmholtz Zahlen ist es empfehlenswert die Ordnung der Quadratur weiter zu erhöhen, weil dafür mehr Knoten pro Wellenlänge benötigt werden.

Darüber hinaus besteht auch die Möglichkeit die Genauigkeit durch die Anzahl der Elemente zu vergrößern. Hierbei hat ungefähr die zehnfache Elementanzahl die gleiche Wirkung wie die Erhöhung von einem zu sieben GP bezogen auf die diskretisierte Fläche mit 100 Dreiecken (Abbildung 3.14). Der wesentliche Unterschied besteht nun darin, dass bei der höheren Ordnung zwar mehr Knoten pro Wellenlänge existieren, diese jedoch innerhalb der gesamten diskretisierten Fläche liegen. Dadurch lässt sich die Geometrie nicht mit den GP besser approximieren, wodurch die Quadratur nur eine Verbesserung der gesamten Lösung darstellt. Daher ist die Approximation des Kreises von enormer Wichtigkeit und muss äußerst akkurat durchgeführt werden, damit möglichst genaue Lösungen für das Schallfeld berechnet werden können. Dieser bedeutende Einfluss der Approximation wird bei der Analyse des Fehlers auf der z-Achse im Fernfeld deutlich.

Der Grenzwert des Fehlers im Fernfeld auf der z-Achse wird in der Abbildung 3.16 gezeigt. Im Gegensatz zu den maximalen auftretenden Fehlern ist aus dieser Abbildung zu entnehmen, dass die Ordnung der Quadratur keinen beziehungsweise einen äußerst kleinen Einfluss auf die Genauigkeit der berechneten Lösungen hat. Der Fehler im Fernfeld verkleinert sich somit nur durch die Erhöhung der Anzahl der Elemente. Aus diesem Grund ist dieser Fehler von der Approximation des Kreises durch den DistMesh-Algorithmus abhängig. Das lässt den Schluss zu, dass die fehlenden Flächenanteile, die bei der zuvor durchgeführten Diskretisierung entstehen, diesen Fehler verursachen.

Der Unterschied zwischen der analytischen Lösung und der Simulation resultiert somit aus der Knotenanzahl und der Approximation der Fläche. Während mit der Gauß'schen Quadratur nur die Knotenanzahl erhöht werden kann, verbessert eine größere Anzahl von Dreiecken sowohl die Knotenanzahl pro Wellenlänge als auch die geometrische Annäherung an die originale Fläche. Allerdings zeigte sich bei der Berechnung, dass sich die Verwendung von höheren Quadraturen kaum auf die Rechenzeit auswirkt. Die benötigte Rechenzeit  $t_r$  ist bei der Verwendung von sieben GP anstatt von einem GP nur um maximal



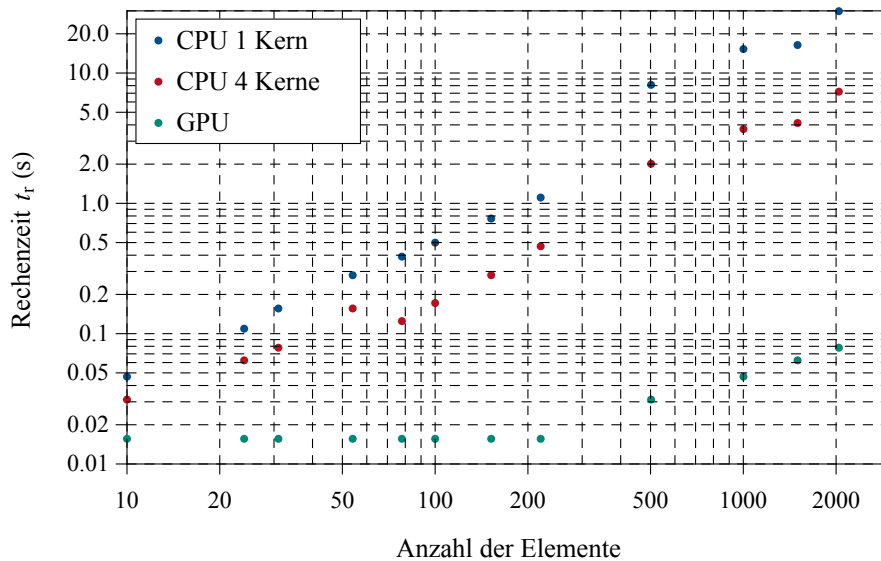


**Abbildung 3.16.:** Grenzwert des Fehlers für die Schallfeldberechnung eines Kolbenstrahlers auf der z-Achse im Fernfeld.

12% langsamer. Im Vergleich dazu wirkt sich die zehnfache Elementanzahl, die den maximalen Fehler auf ungefähr den gleichen Fehler reduziert (Abbildung 3.14), mit Faktor 32,2 auf die Rechenzeit aus. Dadurch ist es sehr empfehlenswert, trotz kleiner Wirkung in großer Entfernung zum Kolbenstrahler, die Quadratur mit sieben GP durchzuführen. Außerdem gibt die Elementanzahl im Wesentlichen nur die Annäherung an den Kreis an, die höhere Knotenanzahl ist ein weiterer guter Nebeneffekt. Wenn die Geometrie gut genug durch die Dreiecke angenähert ist, ist es ratsam nur auf höhere Ordnungen der Quadratur zurückzugreifen, weil diese Berechnung wesentlich effizienter vollzogen werden kann und damit die Rechenzeit reduziert wird. Auf Grundlage der Verwendung des Einheitskreises ergibt sich ein wesentlicher Vorteil für die Quadratur, insofern die Geometrie sehr gut durch die Dreiecke angenähert werden kann. Es kann nämlich sehr schnell und ohne Eingriffe in das Gitter die Knotenanzahl erhöht werden und damit die Schallfeldberechnung bei größeren Helmholtz Zahlen genauer erfolgen.

In dem vorherigen Kapitel wurde bereits beschrieben, dass sowohl sequentielle als auch parallele Programme zur Schallfeldberechnung entwickelt wurden. Das sequentielle und parallele Berechnungsverfahren, welche mit der CPU umgesetzt wurden, haben die selben Ergebnisse berechnet. Der berechnete Schalldruck über die GPU weicht von diesen Werten etwas ab. Das liegt an den unterschiedlichen Genauigkeiten mit denen die CPU und die GPU bei den Datenformaten arbeiten. Durch die höhere Genauigkeit der CPU im Vergleich zur GPU sind dementsprechend auch die berechneten Ergebnisse exakter. Jedoch unterscheiden sich die berechneten Lösungen mit den verschiedenen Hardwarekomponenten äußerst gering und der berechnete Fehler ist um maximal  $10^{-6}$  größer mit der Umsetzung auf der GPU im Vergleich zur Berechnung auf der CPU. Durch diesen geringen Unterschied kann davon ausgegangen werden, dass die gezeigten Fehlerbetrachtungen für die drei Berechnungsmethoden identisch sind.

Neben der Genauigkeit sind die benötigten Rechenzeiten von besonderer Bedeutung. Die Rechenzeit ist für die Simulation von großen Volumen und auch Unterräumen sehr wichtig, weil hierfür das Schallfeld für viele Feldpunkte simuliert wird und nur durch eine sehr schnelle Berechnung die Simulation erfolgen kann. Darüber hinaus ist es bei großen Helmholtz Zahlen unerlässlich die Auflösung der Berechnung zu erhöhen, da sonst unter Umständen Artefakte in der Auswertung entstehen oder wichtige Eigenschaften des Schallfeldes nicht physikalisch abgebildet werden. Dadurch ergeben sich auch eine große Anzahl von Feldpunkten, welche ebenfalls möglichst schnell berechnet werden sollen. Aus diesem Grund wurden die Rechenzeiten der Programmdurchläufe gemessen (Abbildung 3.17).



**Abbildung 3.17.:** Die benötigten Rechenzeiten mit sequentiellen und parallelen Programmieretechniken zur Berechnung des Schallfeldes entlang der z-Achse für eine Gauß'sche Quadratur der fünften Ordnung.

Diese Abbildung bezieht sich auf die Berechnung von 1001 Feldpunkten auf der z-Achse. Es sind die Rechenzeiten für die Simulationsdurchläufe der drei verschiedenen Programmieretechniken in Abhängigkeit der Elementanzahl dargestellt. Wie bereits erwähnt, ist die Rechenzeit für sieben GP um maximal 12% größer im Vergleich zu einem GP. Die hier gezeigte Abbildung berücksichtigt die Quadratur mit sieben GP. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass die Rechenzeit mit der Anzahl der Elemente größer wird. Die Berechnung mit einem Kern der CPU war am langsamsten und die Verwendung von vier Kernen hat die Berechnung um ungefähr Faktor vier beschleunigt. Im Vergleich dazu wird die Rechenzeit bei der Verwendung der GPU enorm reduziert. Bis zu einer Elementanzahl von 220 bleibt diese sogar konstant, sodass der wesentliche Zeitaufwand für das Transferieren der Daten benötigt wird. Danach steigt er ähnlich zu der Berechnung mittels der CPU an. Die zeitliche Ersparnis zwischen der Berechnung mit der GPU im Vergleich zur CPU mit einem Kern beträgt bei einer großen Anzahl von Elementen ungefähr den Faktor 300. Dadurch lassen sich über die Graphikkarte wesentlich größere hoch aufgelöste Schallfelder in einer angemessenen Zeit berechnen.

In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, dass der zuvor entwickelte Programmcode zuverlässig und genau abläuft. Die berechneten Schalldrücke entsprechen mit einem kleinen Fehler den analytischen Lösungen. Hierbei ist jedoch der Fehler von der Elementanzahl und der Gauß'schen Quadratur abhängig. Es zeigte sich, dass mit einer triangulierten Fläche mit 100 Elementen und höheren Ordnungen der Quadratur die Fehler der Simulationen kleiner als der maximal geforderte Fehler von  $\pm 12\%$  ist. Bei einem GP sind hierfür 220 Elemente notwendig. Die Unterschreitung beschreibt hierbei den maximal auftretenden Fehler. Die Lösungen sind äußerst genau und entsprechen nahezu den analytischen Lösungen. Grundsätzlich kann mit einer höheren Ordnung der Quadratur die Lösung genauer berechnet werden, wobei dieses mit einer etwas höheren Rechenzeit verbunden ist. Außerdem ist es für eine genaue Berechnung notwendig die kreisförmige Fläche mit möglichst vielen Dreiecken anzunähern. Im Gegenzug bedeutet das eine größere Rechenzeit, die verhältnismäßig größer als bei der Quadratur ist. Durch den parallelen Programmcode wird die Rechenzeit signifikant verkleinert, wodurch die Möglichkeit einer sehr genauen Berechnung in kurzer Zeit besteht. Darüber hinaus können auch eine größere Anzahl von Feldpunkten, die entweder innerhalb eines großen Volumens liegen oder mit einer hohen Auflösung existieren, in kurzer Zeit berechnet werden. Die Rechenzeit ist bei der Berechnung mithilfe der Graphikkarte sehr klein, sodass sie für die betrachteten Fälle als Echtzeitberechnung angesehen werden kann.

---

### 3.5 Ultraschallwandler in einer schallharten Wand mit finiter Ausdehnung

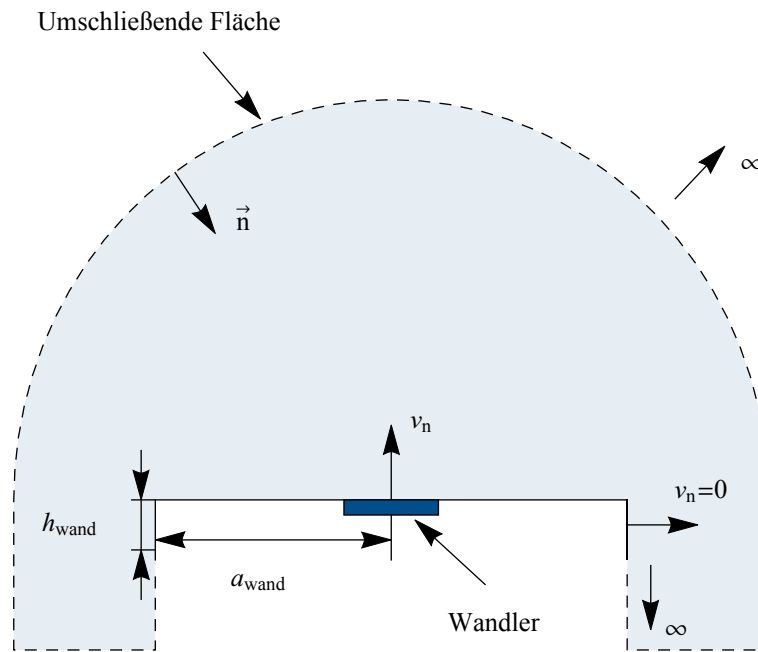
---

Mit den bisherigen Modellen kann die Schallfeldberechnung nur in einem Halbraum durchgeführt werden, weil diese auf dem Rayleigh Integral beruhen. Dieses stellt jedoch eine fundamentale Einschränkung dar, weil dadurch die Lage der akustischen Apertur in einer unendlich ausgedehnten Wand angenommen wird. In der Realität lässt sich hingegen sowohl diese unendlich ausgedehnte beziehungsweise auch sehr großflächige Wand, als auch die exakte Positionierung der akustischen Apertur in dieser schwer produzieren. Aufgrund der Bestrebung nach einem akkuraten Modell, mit dem die physikalischen Eigenschaften möglichst realitätsnah abgebildet werden können, wird ein neues Modell entwickelt. Hierbei soll die bisherige unendlich ausgedehnte schallharte Wand durch eine fest vorgegebene Größe in dem Modell berücksichtigt werden. Daher kann das Modell nicht auf der Grundlage des Rayleigh Integrals entwickelt werden. Aus diesem Grund basiert die Entwicklung auf dem allgemeingültigen KHI. Dadurch können die bisherigen Modelle mit Ausnahme des Modells von COMSOL nicht auf die neuen Randbedingungen angepasst werden und sind daher für diese Simulationen ungeeignet.

Mithilfe des KHI gibt es zwei Möglichkeiten das Schallfeld zu berechnen. Wie bereits in Kapitel 2.3 erläutert wurde, unterteilt die umschließende Oberfläche das Gebiet in zwei Bereiche. Diese sind zum einen der Innenraum und zum anderen der Außenraum [72]. Anhand dieser zwei Bereiche kann das KHI unterschiedlich formuliert werden. Je nach Anwendungsfall eignet sich die Formulierung für den Innenraum oder Außenraum besser zur Simulation. Um eine möglichst geeignete Wahl des KHI's zu treffen, muss daher zunächst die geometrische Form des Wandlers mit der umgebenen schallharten Wand betrachtet werden. Dazu wird angenommen, dass die schallharte Wand grundsätzlich zum Befestigen des Ultraschallwandlers an einer beliebigen Position verwendet wird. Hierbei wird zunächst von einer beliebigen Form des Ultraschallwandlers als auch der schallharten Wand ausgegangen. Die schallharte Wand um den Ultraschallwandler ist zum einen die Befestigung und zum anderen eine Art Gehäuse, welche um diesen anliegt. Zwar soll das Modell möglichst alle Eigenschaften des umgebenen Raums beinhalten, sodass es möglichst realitätsnah die Schallausbreitung abbildet. Jedoch bedeutet dies einen großen Rechenaufwand, weil dafür die Oberfläche des gesamten Raumes mit einer entsprechenden Anzahl von Knoten pro Wellenlänge diskretisiert werden müsste. Das entstehende Gleichungssystem ist dabei mit der derzeitigen Rechentechnik nicht zu lösen. Aus diesem Grund wird nur die Oberfläche des Kolbenstrahlers und der umgebenen schallharten Wand modelliert. Auch die Rückseite der schallharten Wand, an der sich Befestigungsvorrichtungen befinden, wird nur angenähert und als eben angenommen. Die Mantelfläche oder Seitenflächen der schallharten Wand werden ebenso bei der Simulation berücksichtigt. Hierbei wird jedoch der Einfluss der Rückseite und der Mantelfläche auf das Schallfeld untersucht und überprüft, ob diese vernachlässigt werden können.

Die Simulation der Schallausbreitung von einem solchen Körper würde zunächst die Berechnung mithilfe des KHI für Außenraumprobleme nahelegen. Das ist damit begründet, dass die Schallabstrahlung in ein unendlich ausgedehntes Medium erfolgen soll und die gesamte zu untersuchende Geometrie an sich eine geschlossene Oberfläche darstellt. Eine vereinfachte Variante, bei dem die Anzahl der Knoten deutlich reduziert werden kann, ist die Modellierung mit dem KHI als Innenraumproblem (Abbildung 3.18). Bei diesem Modell bilden die Oberseite und die Mantelfläche der schallharten Wand und die Oberfläche des Kolbenstrahlers die umschließende Oberfläche. Die übrige Fläche wird im Unendlichen geschlossen und es wird angenommen, dass die Monopole und Dipole auf dieser Fläche keinen Einfluss auf das simulierte Schallfeld besitzen. Hiermit würde die Rückseite der schallharten Wand vernachlässigt werden und damit würde die gesamte rückseitige Anordnung nicht in der Simulation berücksichtigt werden. Diese Vernachlässigung der Rückseite ist dennoch sinnvoll, weil sich dort unter anderem Befestigungsvorrichtungen, elektrische Komponenten oder andere Baugruppen befinden (Kapitel 4.3). Diese könnten nicht in dem Modell berücksichtigt werden, weil dadurch die Knotenanzahl deutlich steigen würde und dadurch die Simulation nicht mehr durchgeführt werden könnte. Dadurch ist es eine gute Möglichkeit mit dieser Art der Modellierung die Knotenanzahl zu reduzieren, in dem die Wand auf der Rückseite nicht diskretisiert werden muss und somit der Rechenaufwand deutlich reduziert werden kann. Deshalb wird

auf der Basis des KHI für Innenraumprobleme ein Modell entwickelt, welches in der Abbildung 3.18 dargestellt ist.



**Abbildung 3.18.:** Modell zur Schallfeldberechnung von einem Ultraschallwandler in einer schallharten Wand mit einer vorgegebenen Ausdehnung.

Im Allgemeinen soll das Modell sämtliche Formen der umgebenen schallharten Wand und des Ultraschallwandlers ermöglichen, dennoch wurde für diese Simulation exemplarisch eine kreisrunde ebene Form ausgewählt. Diese wurde in Hinblick auf die späteren Messungen (Kapitel 4.7) ausgesucht und es werden auch im Folgenden die geometrischen Abmessungen dieser Platte verwendet. In der Abbildung wird ein Ultraschallwandler in einer kreisförmigen schallharten Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 100 \text{ mm}$  und der Höhe  $h_{\text{wand}} = 3 \text{ mm}$  gezeigt. Hierbei stellt die Oberfläche der schallharten Wand mit der Oberseite und der Mantelfläche und der Öffnung des Ultraschallwandlers ein Teil der umschlossenen Fläche des KHI dar. Nachdem die Höhe der Platte erreicht wurde, wird die Oberfläche des KHI in das negativ Unendliche überführt. Dort wird die Oberfläche des gesamten Innenraums geschlossen. Dadurch ergibt sich für die Normalenrichtung der Flächenelemente eine negative Richtung, sodass diese in das Volumeninnere zeigen. Auf der gesamten Oberfläche werden die Neumann Randbedingungen durch die Schallschnelle vorgegeben. Diese betragen aufgrund der schallharten Wand  $v_n = 0 \text{ ms}^{-1}$ , mit Ausnahme des akustischen Wandler, der mit der Schnelle  $v_n = 1 \text{ ms}^{-1}$  vibriert. Der sich in dieser schallharten Wand befindende Ultraschallwandler hat einen Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und wird mit einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  angeregt. Auf der Basis des entwickelten Modells wird im nächsten Kapitel das mathematische Vorgehen erläutert, mit dem die Schallwellenausbreitung innerhalb des Volumens berechnet werden soll.

### 3.5.1 Mathematische Formulierung

In dem folgenden Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen und das Vorgehen für die Simulation des Modells entwickelt. Der Ausgangspunkt hierfür ist das KHI (Kapitel 2.3), welches jedoch abgewandelt werden muss. Das liegt daran, dass das gezeigte Integral entsprechend der Gleichung (2.26) für die Berechnung des Außenraums verwendet wird, während in diesem Fall die Berechnung für den

Innenraum erfolgt. Diese Veränderung kann jedoch durch das Vertauschen der Normalenrichtung auf der Oberfläche erfolgen [34, 39]. Dadurch verändert sich das Vorzeichen innerhalb des Integrals.

Im Gegensatz zur Berechnung mit dem Rayleigh Integral, bedarf es bei der Berechnung mit dem KHI eines zusätzlichen Schritts, bei dem die zweite Feldgröße auf der Oberfläche des Integrals ermittelt wird. Das bedeutet, dass durch die Vorgabe der Schallschnelle zunächst die Verteilung des Schalldrucks auf der Oberfläche berechnet werden muss [73]. Diese Berechnung ist zwingend notwendig, weil die Schallschnelle und der Schalldruck nicht unabhängig voneinander sind und beide Größen für die Quellverteilung der Monopole und Dipole benötigt werden. Aus diesem Grund wird zunächst die Berechnung des Schalldrucks auf der Oberfläche der schallharten Wand und des Ultraschallwandlers erfolgen. Hierbei wird das zuvor angepasste KHI für den Innenraum mit dem Faktor zwei multipliziert, weil sich der gesuchte Schalldruck auf der Oberfläche befindet und die Oberfläche eine weitestgehend glatte Form aufweist [10]. Das KHI zur Berechnung des Schalldrucks auf der Oberfläche ist deshalb

$$p(\vec{r}_p) = 2 \oint_F \frac{\partial p(\vec{r}_q)}{\partial n} g(\vec{r}_p, \vec{r}_q) - p(\vec{r}_q) \frac{\partial g(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}{\partial n} dF. \quad (3.16)$$

Anhand dieses Integrals wird der erste Schritt zur numerischen Berechnung des Schallfeldes durchgeführt, indem der Schalldruck auf der Oberfläche berechnet wird. Dieser Schritt ist von besonderer Bedeutung, weil dieser die Quellverteilung der Dipole angibt und für die weitere Berechnung des Schallfeldes in dem Volumen verwendet wird. Aus diesem Grund sollte die Berechnung des Schalldrucks auf der Oberfläche möglichst genau erfolgen.

Um die numerische Schallfeldsimulation durchführen zu können wird zunächst die gesamte Oberfläche trianguliert. Dabei wird analog zum Rayleigh Integral der DistMesh-Algorithmus verwendet, wobei in diesem Fall die gesamte Oberfläche, bestehend aus der Öffnung des Ultraschallwandlers und der schallharten Wand, diskretisiert wird. Hierbei muss darauf geachtet werden, dass die Geometrie des Kolbenstrahlers innerhalb der schallharten Wand hinreichend gut approximiert wird, sodass der Fehler klein bleibt (Kapitel 3.4.4).

Nachdem die Oberfläche diskretisiert wurde, kann der eigentliche Teil der Berechnung erfolgen. Dazu wird zunächst das Integral in den Monopolterm und den Dipolterm getrennt. Diese zwei Terme werden dann jeweils in ein Produkt bestehend aus einer Matrix und einem Vektor transformiert. Bei dieser Betrachtung wird vorausgesetzt, dass die Schalldrücke und Schallschnellen in Normalenrichtung innerhalb jedes Elements konstant sind. Dann entsprechen jeweils der eine Vektor der Schallschnelle und der andere dem Schalldruck. Die zwei Matrizen werden aus der Green'schen Funktion und deren Normalenableitung gebildet. Hierbei wird die Fundamentallösung der Helmholtz Gleichung verwendet [34]. Die Elemente der Matrix für die Monopole lässt sich mit

$$m_{p_{m,n}} = -j\omega\rho_0 \iint_{F_n} g(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q) dF \quad (3.17)$$

berechnen [72]. Das Matricelement  $m_{p_{m,n}}$  entspricht der Integration über das n-te Dreieck und wird für den Mittelpunkt des m-ten Elements berechnet. Aufgrund der Annahme, dass der Schalldruck beziehungsweise die Schnelle konstant innerhalb eines Elements sind, ist die Berechnung des Integrals bezogen auf den Mittelpunkt ausreichend bei einer kleinen Diskretisierung [34]. Wird die Matrix aus den Elementen  $m_{p_{m,n}}$  gebildet und mit dem Vektor der Schallschnelle das Produkt gebildet, entsteht ein Vektor. Dieser beinhaltet in jeder Vektorkomponente den Schalldruck, der durch die Summe aller Schallschnellen gebildet wird.

In der selben Art werden die Elemente für die Matrix der Dipole bestimmt. Jedoch ist hierbei der Schalldruck auf der Oberfläche unbekannt, sodass eine Berechnung des resultierenden Vektors zunächst nicht möglich ist. Um die Matrix für die Dipole bilden zu können, müssen zunächst die Elemente nach

$$d_{p_{m,n}} = - \iint_{F_n} \left( jk + \frac{1}{R(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q)} \right) g(\vec{r}_{p_n}, \vec{r}_q) \frac{\vec{R}(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q) \cdot \vec{n}}{R(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q)} dF \quad (3.18)$$

ermittelt werden [72]. In dieser Gleichung wurde bereits die Normalenableitung der Fundamentalgleichung gebildet. Diese wird für jedes Element  $n$  integriert und dabei auf den Mittelpunkt des  $m$ -ten Dreiecks bezogen. In diesem Integranden besteht die innere Normalenableitung der Euklidischen Distanz aus dem Skalarprodukt, welches aus dem Normalenvektor  $\vec{n}$  und dem normierten Abstandsvektor gebildet wird. Wenn die Integration von allen Elementen durchgeführt wurde, kann die Matrix für den Schalldruck aufgestellt werden.

Damit ist eigentlich das allgemeine Vorgehen zur Berechnung der Elemente für das Aufstellen der Matrix erläutert. Jedoch gibt es eine Besonderheit, wenn das Integral für das eigene Element berechnet werden soll. Hierbei entstehen Singularitäten, die sowohl bei den Monopolen als auch bei den Dipolen auftreten. Für den Monopol lässt sich die schwache Singularität über die Betrachtung in Polarkoordinaten beheben [74]. Dazu wird das Integral durch

$$m_{p_{m,m}} = -j\omega\rho_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a_n} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} r dr d\varphi \quad (3.19)$$

ersetzt. Dieses Integral hat eine ähnliche Form zu dem Rayleigh Integral und kann ebenfalls analytisch gelöst werden, sodass sich

$$m_{p_{m,m}} = \frac{c_0\rho_0}{2} \left( e^{-jk\sqrt{\frac{F_n}{\pi}}} - 1 \right) \quad (3.20)$$

ergibt [34]. Diese Lösung wird für die Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen, welche die Integration auf das eigene Element beschreibt, verwendet. Wesentlich einfacher zu handhaben ist die Lösung der Singularitäten für die Matrixelemente des Dipols. Durch die Verwendung von ebenen Dreiecken werden die Dipole des Elements

$$d_{p_{m,m}} = 0 \text{ durch } \vec{R}(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q) \perp \vec{n}. \quad (3.21)$$

Durch das Skalarprodukt des normierten Abstandsvektors und dem Normalenvektor ist die Lösung somit direkt zu bestimmen. Dieses Skalarprodukt wird jedoch nur für Dreiecke in der Ebene zu null, während bei gekrümmten Flächen eine gesonderte Betrachtung [72] erforderlich ist.

Mithilfe der ermittelten Einträge der Matrizen kann das Gleichungssystem zum Berechnen des Schalldrucks auf der Oberfläche aufgestellt werden. Anhand der Lösung des Gleichungssystems ist es nun möglich, den Schalldruck, der zuvor sowohl auf der rechten Seite der Gleichung (3.16) als auch im Integralausdruck vorhanden war, numerisch zu ermitteln. Das Gleichungssystem

$$\left( \frac{1}{2} \mathbb{E} + D_p \right) P = M_p V_n \quad (3.22)$$

beinhaltet dabei die Matrizen  $D_p$  und  $M_p$ , welche aus den Elementen  $d_{p_{m,n}}$  und  $m_{p_{m,n}}$  gebildet werden [73]. Um eine Abgrenzung zu den physikalischen Vektoren herzustellen, sind die Vektoren für die Schnelle  $V_n$  und den Schalldruck  $P$  ohne Vektorpfeile gekennzeichnet. Jedoch werden diese als Groß-



---

buchstaben dargestellt, damit deren besondere Bedeutung berücksichtigt wird. Abschließend muss dieses Gleichungssystem gelöst werden, um den Schalldruck auf der Oberfläche zu ermitteln. Jedoch erweist sich das Lösen im Allgemeinen als sehr schwierig, weil die Matrix  $D_p$  in der Regel vollbesetzt und unsymmetrisch ist. Gerade für eine große Matrix  $D_p$  ist der Aufwand sehr rechenintensiv.

Wie im vorherigen Abschnitt bereits angekündigt wurde, soll an dieser Stelle eine kurze Erläuterung zur Lösbarkeit von relativ großen Oberflächen im Verhältnis zur Wellenlänge erläutert werden. Die Matrix  $D_p$  ist eine quadratische Matrix mit  $m$  Elementen, wobei diese den Dreiecken der diskretisierten Oberfläche des KHI entspricht. Im Folgenden werden die zwei Modellansätze des Innenraums und Außenraums gegenüber gestellt und exemplarisch die Unterschiede für die eingangs beschriebene schallharte Wand erläutert. Die Diskretisierung der beiden Modelle wird mit jeweils zehn Knoten pro Wellenlänge vorgenommen. Bei einer einheitlichen Diskretisierung mit gleichseitigen Dreiecken werden bei dem KHI für den Innenraum ungefähr 104000 Dreiecke und bei dem KHI für den Außenraum ungefähr 205000 Dreiecke benötigt. Beim Aufstellen der Matrix werden demzufolge bei dem KHI mit der Innenraumformulierung ungefähr 80,6 GB Speicher benötigt, während der Speicherbedarf für den anderen Fall ungefähr 307 GB beträgt. Dieser Speicherbedarf ist ausschließlich zum Speichern der Matrix notwendig und berücksichtigt noch keinen Speicherplatz der zum Lösen des Gleichungssystems notwendig ist. Allerdings ist bei dem Speicherbedarf jeweils eine voll besetzte Matrix angesetzt worden. Durch die ebenen schallharten Wände, sowohl auf der Oberseite als auch auf der Unterseite, ist die Matrix nicht komplett besetzt, wodurch weniger Speicherplatz als der angegebene benötigt wird. Trotzdem ist die Berechnung der Schallabstrahlung mit dem KHI als Innenraumproblem wesentlich ressourcensparender, sodass die Möglichkeit besteht, auch größere Modelle zu berechnen, höhere Frequenzen oder eine genauere Diskretisierung zu verwenden.

Die Lösung des Gleichungssystems (3.22) ist zeitaufwendig, sodass das Modell vereinfacht wird. Hierbei wird angenommen, dass die schallharte Wand einen hinreichend großen Radius  $a_{\text{wand}}$  besitzt, sodass die Quellverteilung der Dipole auf der Mantelfläche sehr viel kleiner als auf der Oberseite ist. Dadurch wird das Oberflächenintegral des KHI auf die Oberseite der schallharten Wand reduziert. Aufgrund einer ebenen Platte folgt durch das Skalarprodukt des normierten Abstandsvektors und den Normalenvektor der Flächenelemente für die Matrix  $D_p = 0$ . Anhand dieser Vereinfachung muss dieses Gleichungssystem nicht mehr gelöst werden, wodurch zum einen die Rechenzeit und zum anderen der Speicherbedarf deutlich reduziert wird.

Diese Modellannahme stellt zunächst eine Vereinfachung dar, sodass es mit zwei Modellen in COMSOL verglichen und validiert wird. Hierbei wird zum einen ein Modell mit der FEM und zum anderen eines mit der BEM verwendet. Trotz der Vereinfachung beinhaltet das entwickelte Modell die finite Abmessung der schallharten Wand um den Ultraschallwandler. Darüber hinaus bietet das vereinfachte Modell auch wesentliche Vorteile. Durch die Reduzierung des Speichers, welcher nicht mehr quadratisch mit der Anzahl der Elemente steigt, können weitaus mehr triangulierte Elemente für die Simulation der Schallabstrahlung verwendet werden. Deshalb können beispielsweise das Schallfeld bei weitaus höheren Frequenzen und einer entsprechenden Anzahl von Knoten pro Wellenlänge verwendet werden. Auch die numerische Genauigkeit steigt durch die Verwendung von einer größeren Anzahl von Knoten pro Wellenlänge an.

In der Berechnung des Schalldrucks auf der Oberfläche besteht der hauptsächliche Rechenaufwand der BEM [34]. Diese muss äußerst genau durchgeführt werden, weil die ermittelten Werte für die weitere



Berechnung des Schallfeldes im Innenraum verwendet werden. Im letzten Schritt dieser Methode wird das diskrete KHI der Form

$$p(\vec{r}_p) = -\frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \sum_{m=1}^M v_{n_m} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_{q_m})}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_{q_m})} \Delta F_m + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^M p_m \left( jk + \frac{1}{R(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q)} \right) \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_{q_m})}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_{q_m})} \frac{\vec{R}(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q) \cdot \vec{n}}{R(\vec{r}_{p_m}, \vec{r}_q)} \Delta F_m \quad (3.23)$$

für die gesuchten Feldpunkte berechnet. Die Berechnung dieses Ausdrucks erfolgt analog zu der Berechnung des Rayleigh Integrals (3.12), nur dass in diesem Fall noch die Dipole auf der Oberseite der ebenen schallharten Wand berücksichtigt werden. Bei der Berechnung wird ebenfalls die Gauß'sche Quadratur angewendet, die jedoch aufgrund der Übersichtlichkeit in dieser Gleichung nicht dargestellt ist. Aufgrund der höheren Genauigkeit und im Vergleich zur geringfügigen Erhöhung der Rechenzeit werden für die Simulation des Schalldrucks sieben GP verwendet (Kapitel 3.4.4).

Im nächsten Abschnitt wird die Implementierung in Mathematica erläutert. Anschließend wird dieses Modell zur Simulation des Schalldrucks verwendet. Basierend auf zwei alternativ entwickelten Modellen, sowohl mit der BEM, als auch mit FEM, in COMSOL werden der Schalldruck auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers und der schallharten Wand untersucht und es werden hierbei die Unterschiede erläutert. Abschließend erfolgt der Vergleich und die Validierung zwischen dem entwickelten BEM Modell in COMSOL und dem in diesem Abschnitt eigenen entwickelten Modell in Mathematica.

### 3.5.2 Schallfeldberechnung und Vergleich mit kommerzieller Software

In diesem Abschnitt wird der Programmablauf zur Simulation des Schallfeldes in Mathematica erläutert. Hierbei wird zunächst das methodische Vorgehen geschildert und anschließend werden die Ergebnisse diskutiert. Dazu wird ein Vergleich zwischen den Simulationsergebnissen zwischen dem entwickelten Modell in Mathematica und den zwei entwickelten Modellen in COMSOL durchgeführt. Eine besondere Betrachtung erfolgt hierbei für die Analyse des Schalldrucks auf der Oberfläche der schallharten Wand. Diese Untersuchung ist wegen der Modellvereinfachung wichtig, weil diese Verteilung des Schalldrucks gerade die Quellverteilung der Dipole ist. Aufgrund der weiteren Berechnung mit diesen Dipolen soll eine möglichst genaue Übereinstimmung erreicht werden. Abschließend wird das Schallfeld in der xz-Ebene simuliert und es wird ein Vergleich der Ergebnisse aus dem Modell in Mathematica und dem BEM Modell aus COMSOL durchgeführt.

Die Implementierung des Programmablaufs zur Schallfeldberechnung orientiert sich an dem Vorgehen des Rayleigh Integrals (Kapitel 3.4.3). Im ersten Schritt werden dazu die physikalischen Größen festgelegt. Diese entsprechen den selben Werten, wie bei der Berechnung des Rayleigh Integrals (Kapitel 3.4.3). Im Anschluss wird die Geometrie des Ultraschallwandlers mit der umgebenen schallharten Wand bearbeitet. Hierzu wird zunächst das triangulierte Gitter von dem DistMesh-Algorithmus eingelesen. Im Gegensatz zu der vorherigen Betrachtung ist es jedoch für diese geometrische Form nicht mehr möglich einen Einheitskreis zu verwenden. Daher wird ein gemeinsames Gitter bestehend aus dem Radius der schallharten Wand  $a_{\text{wand}} = 100 \text{ mm}$  und dem Radius des Ultraschallwandlers  $a = 6,4 \text{ mm}$  erzeugt. Die Qualität dieses Gitters wurde wieder nach dem Verhältnis zwischen des Innenradius  $r_i$  und Außenradius  $r_a$  von den Dreiecken untersucht (Kapitel 3.4.2). Das Gitter besteht insgesamt aus 147331 Dreiecken und das schlechteste Dreieck hat eine Qualität  $q_{\text{drei}} = 0,8169$ . Die mittlere Qualität der Dreiecke beträgt  $\bar{q}_{\text{drei}} = 0,9987$ , wodurch von einem hervorragenden Gitter ausgegangen werden kann. Für die weitere Berechnung werden die kartesischen Koordinaten der Eckpunkte, die Flächenschwerpunkte und die Fläche von den Dreiecken ermittelt. Des Weiteren werden die Normalenvektoren der Elemente berechnet. Anschließend erfolgt die Unterscheidung zwischen den Elementen des Ultraschallwandlers und denen,

---

die die schallharte Wand bilden. Anhand dieser erfolgt die Zuweisung der Randbedingungen. Hierbei wird die Schallschnelle für den Ultraschallwandler mit  $v_n = 1 \text{ ms}^{-1}$  und für die schallharte Wand mit  $v_n = 0 \text{ ms}^{-1}$  definiert.

Mit den vormals festgelegten physikalischen und geometrischen Größen wird die Schallfeldberechnung durchgeführt. Um den Schalldruck im Innenraum simulieren zu können, muss zunächst der Schalldruck auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers und der schallharten Wand berechnet werden. Diese Berechnung wird anhand einer selbst entwickelten Funktion in Mathematica umgesetzt. Dabei basiert sie auf der Gleichung (3.17), mit der die numerische Integration auf die Nachbarelemente durchgeführt wird und der Gleichung (3.20), mit der die Singularitäten behandelt werden. Die numerische Integration wird mit sieben GP durchgeführt, weil sich beim Rayleigh Integral gezeigt hat, dass mit dieser genauere Ergebnisse bei einem unwesentlich höheren Zeitaufwand im Vergleich zu einer kleineren Anzahl von GP's simuliert werden können (Kapitel 3.4.4). Anschließend kann mit der implementierten Funktion in Mathematica der Schalldruck und somit die Dipolverteilung auf der Oberfläche simuliert werden.

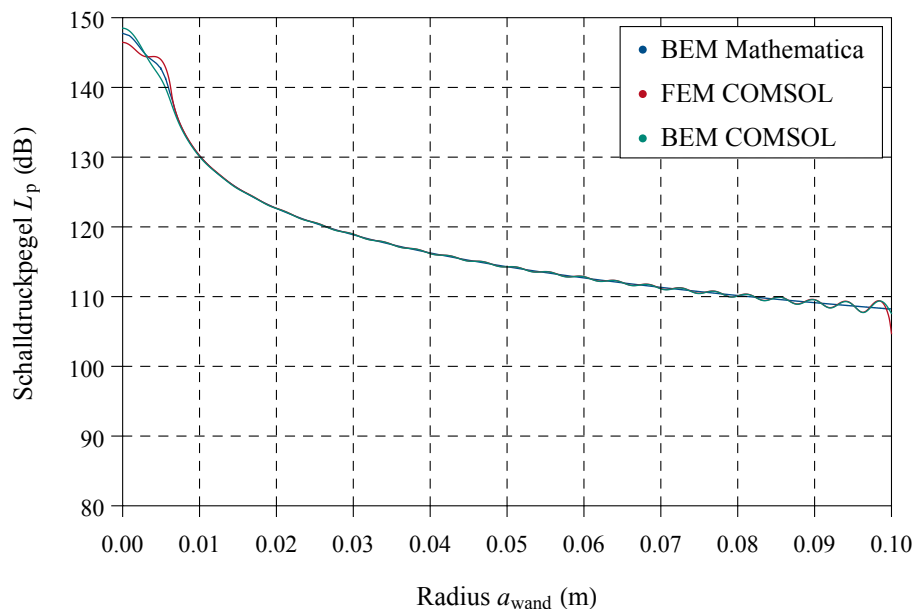
Nachdem beide Randbedingungen auf der Oberfläche bekannt sind, kann der Schalldruck für den Innenraum mit der Gleichung (3.23) berechnet werden. Hierbei wird die Berechnung für die Monopole und Dipole zunächst separat durchgeführt und erst im Anschluss zusammengefügt. Es hat sich beim Rayleigh Integral gezeigt, dass die Schallfeldberechnung mithilfe der GPU im Vergleich zur Berechnung mit der CPU sehr viel zeitsparender ist (Abbildung 3.17). Aus diesem Grund sind zwei Funktionsabläufe in CUDA für die Berechnung des Schalldrucks für den Monopolanteil und den Dipolanteil programmiert.

Bei der Berechnung des Schallfeldes für die Monopole werden die geometrischen Daten, die Feldpunkte des Innenraums und die physikalischen Größen verwendet. Die numerische Integration über die Flächenelemente wird ebenfalls mit sieben GP in dieser Funktion durchgeführt. Die Ausgabe dieser Funktion sind der Schalldruck mit einem realen und imaginären Anteil und den Koordinaten des Feldpunktes, für den die Berechnung durchgeführt wurde. Die Berechnung des Integrals für die Dipole ist etwas aufwendiger, weil der Schalldruck auf der Oberfläche eine komplexe Größe ist, während die Schallschnelle beim Monopol in diesem Fall eine reale Größe ist. Ansonsten ist das Vorgehen das selbe wie beim Monopol, nur mit dem veränderten Integranden. Abschließend wird der gesamte Schalldruck für die ausgewählten Feldpunkte berechnet. Dazu werden die Monopole und Dipole nach der ursprünglichen Gleichung (3.23) zusammengefügt. Zum Schluss werden die simulierten Daten aufbereitet und graphisch wiedergegeben. Zum Vergleich und zur Validierung des Modells mit bestehenden Simulationstools werden zwei weitere Modelle in COMSOL entwickelt. Das erste Modell basiert dabei auf der FEM und stellt eine Erweiterung des zuvor entwickelten Modells (Kapitel 3.2.1) dar. Hierbei wurde ebenfalls eine Achsensymmetrie vorausgesetzt, sodass sich das Schallfeld mit einer ausreichenden Knotenanzahl simulieren lässt. Es wird dafür das Volumen mit 20 Knoten pro Wellenlänge und einer quadratischen Form der Dreiecke diskretisiert. Das bisherige Modell wird um einen Bereich neben der schallharten Wand erweitert, um die finite Größe abbilden zu können. Dazu wird ab einem Radius von  $a_{\text{wand}} = 100 \text{ mm}$  die schallharte Wand in negative Richtung für 100 mm fortgeführt. Das sich neben der schallharten Wand befindende Volumen hat zwei PMI's, mit denen der Schall in negative und radiale Richtung gedämpft wird. Diese PMI's haben die gleiche Schichtdicke wie bei dem ursprünglichen Modell. Anhand des entwickelten Modells in COMSOL werden Simulationen zur Schallfeldberechnung von Ultraschallwandlern in einer finiten Apertur durchgeführt. Diese Simulationen erfolgen analog zum Modell mit einer unendlich ausgedehnten Ebene.

Das zweite Modell in COMSOL wird auf dem Server des Fachgebiets Mess- und Sensortechnik der TU Darmstadt entwickelt. Die dort vorhandenen wesentlichen Hardwarekomponenten für die Simulation weichen von den bisherigen ab und können in dem Kapitel 3.2 entnommen werden. Darüber hinaus basiert das entwickelte Modell auf der verwendeten COMSOL Version 5.3a, sodass die Modellbildung und Simulation mit der BEM möglich ist. Die in COMSOL implementierte Variante basiert ebenfalls auf dem KHI und es kann auch zwischen einem Innenraum und Außenraum unterschieden werden. Hierbei ist es aber wichtig, dass die Simulation in COMSOL nur mit geschlossenen Oberflächen durchgeführt werden kann. Dadurch kann der oben beschriebene Modellansatz (Kapitel 3.5) in der Form

nicht umgesetzt werden. Aus diesem Grund wird das Modell mit dem KHI für Außenraumprobleme verwendet. Die physikalischen Parameter sind hierbei die selben wie bei der FEM und dem erstellten Modell in Mathematica. Die Oberfläche für das KHI umfasst den Ultraschallwandler mit einem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$ , welcher sich in einer schallharten Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 100 \text{ mm}$  und der Höhe  $h_{\text{wand}} = 50 \text{ mm}$  befindet. Dabei wurde eine deutlich dickere Platte gewählt, weil bei den ersten Untersuchungen festgestellt wurde, dass bei der Verwendung von zu dünnen Platten numerische Probleme auftreten und die Simulation nicht akkurat durchgeführt werden kann. Der Hersteller der Software empfiehlt bei der Diskretisierung mindestens sechs Knoten pro Wellenlänge zu verwenden. Um eine höhere Genauigkeit zu erreichen und trotzdem ein simulationsfähiges Modell zu besitzen, werden acht Knoten pro Wellenlänge verwendet. Aufgrund des quadratischen Wachstums des benötigten Arbeitsspeichers ist eine größere Anzahl von Knoten nicht sinnvoll umsetzbar, weil bei acht Knoten pro Wellenlänge bereits 102GB von 256GB zum Lösen des Gleichungssystems benötigt werden. Neben den steigenden Bedarf des Arbeitsspeichers erhöht sich auch die Rechenzeit und die Zeit zum Ausgeben der Felddbilder.

Es werden mit diesen drei Modellen Simulationen durchgeführt und deren Ergebnisse miteinander verglichen. Hierbei ist die Berechnung des Schalldrucks auf der Oberseite der schallharten Wand von besonderer Bedeutung, weil diese die Quellverteilung der Dipole für das KHI vorgibt und somit einen entscheidenden Anteil an der weiteren Berechnung des Schalldrucks in dem Volumen einnimmt. Aus diesem Grund wird zunächst der Schalldruck auf der Oberfläche für die drei Modelle ermittelt und verglichen. Durch die Symmetrie der Modelle (Abbildung 3.18) kann davon ausgegangen werden, dass sich der Schalldruck in der  $\varphi$  Komponente nicht ändert und es somit nur eine radiale Abhängigkeit gibt. Die Ergebnisse der dreidimensionalen Modelle wurden daher um eine Dimension reduziert, in dem dort eine Symmetrie bezüglich der z-Achse vorausgesetzt wird. Anhand der Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten existiert dann für den Schalldruck auf der Oberfläche auch nur noch eine Abhängigkeit vom Radius. Die simulierten Schalldruckpegel auf der Oberfläche der drei Modelle können dann miteinander verglichen werden (Abbildung 3.19).



**Abbildung 3.19.:** Verteilung des Schalldruckpegels auf der Oberfläche des Kolbenstrahlers mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und der umgebenen Wand mit einem Radius  $a_{\text{wand}} = 100 \text{ mm}$ .

Der simulierte Schalldruckpegel auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers und der schallharten Wand ist bei den drei Modellen in ungefähr dem selben Bereich und weicht um maximal 2 dB voneinander ab. Diese Abweichung tritt jedoch nicht zwischen dem Modell in Mathematica und einem Modell in COMSOL auf, sondern zwischen der Modellierung der FEM und BEM in COMSOL. Die größten Unterschiede

---

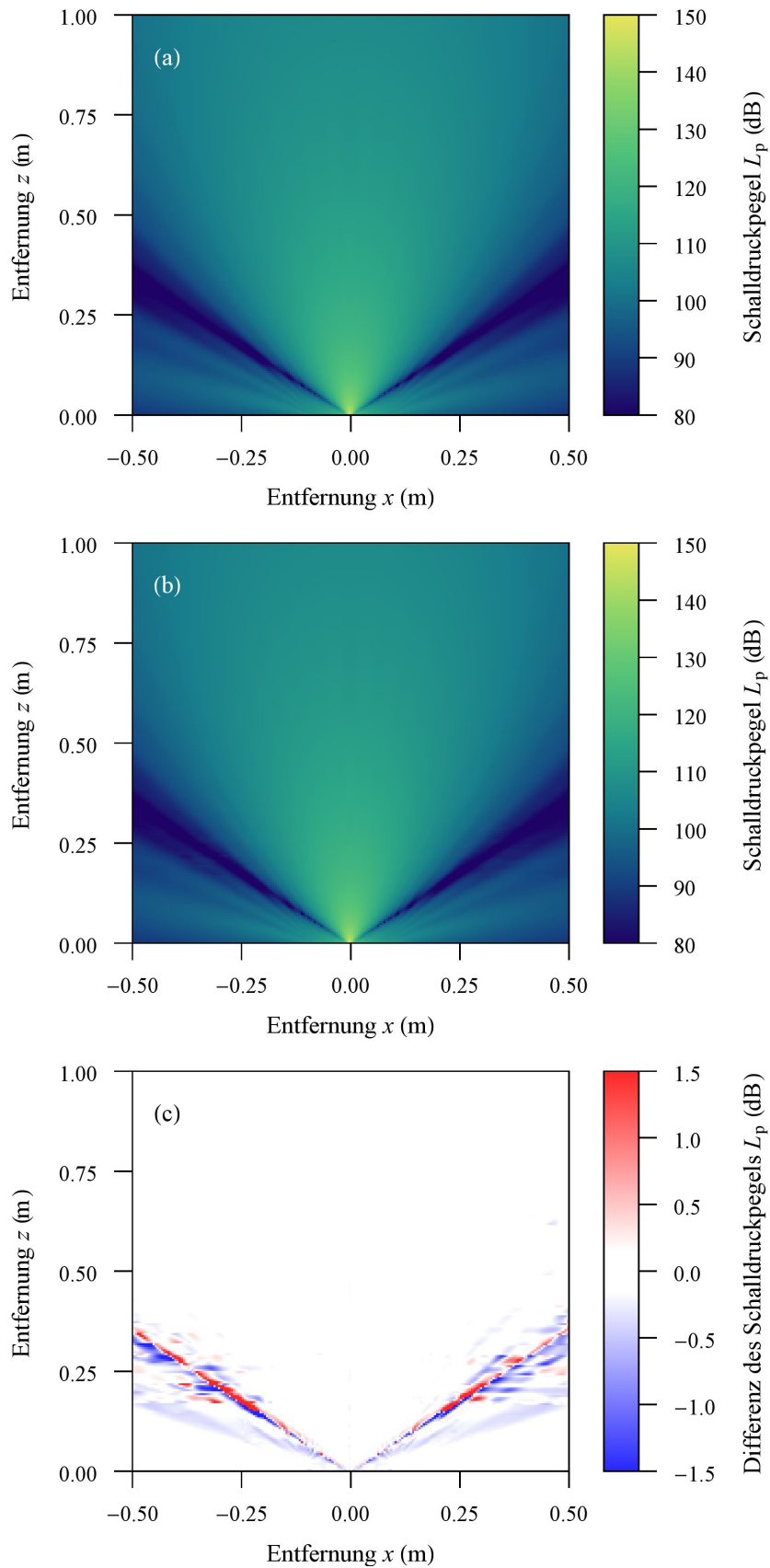
existieren auf der Oberfläche und in der Nähe des Kolbenstrahlers. In diesem Bereich unterscheiden sich die Lösungen der Modelle in COMSOL am meisten, während das Ergebnis welches mit Mathematica simuliert wurde zwischen diesen Werten liegt. Es wird vermutet, dass die wahrscheinlichste Ursache das numerische Handhaben der Singularitäten die Unterschiede verursacht. Jedoch war eine Überprüfung dieser These hierfür nicht möglich.

Der allgemeine Verlauf des Schalldruckpegels ist bei den drei Modellen mit zunehmenden Abstand vom Ursprung abnehmend. Während bei dem Modell mit Mathematica der Schalldruck auch lokal abnehmend ist, stellen sich bei den zwei anderen Modellen lokale Maxima und Minima ein. Diese Oszillationen sind mit steigender Näherung zu der Kante der schallharten Wand größer. Die Ursache hierfür bilden die Dipole auf der Mantelfläche. Diese bewirken eine Rückwirkung auf die Oberseite der kreisförmigen schallharten Wand. Aufgrund der Vernachlässigung der Dipole auf der Mantelfläche in dem implementierten Modell in Mathematica (Kapitel 3.5) prägt sich dieses lokale Verhalten nicht aus. Bei ganzheitlicher Analyse lässt sich schlussfolgern, dass die Modelle hinsichtlich des Schalldruckpegels auf der Oberfläche gut übereinstimmen. Darüber hinaus ist der Bereich zwischen ungefähr 8 mm und 80 mm bei den Modellen nahezu identisch und weicht um maximal 0.3 dB ab. Des Weiteren liegt in diesem Bereich auch ein wesentlich größerer Schalldruck als am Rand der schallharten Wand vor, sodass sich die Fehler am Rand der schallharten Wand weniger stark auf das zu berechnende Schallfeld im Innenraum auswirken.

Aufbauend auf dieser Berechnung wurde das Schallfeld für die xz-Ebene mit der BEM in COMSOL und Mathematica simuliert (Abbildung 3.20). Hierbei wird der Druck für 40401 Feldpunkte, welche in einem Bereich von  $-0.5\text{ m} \leq x \leq 0.5\text{ m}$  und  $0\text{ m} \leq z \leq 1\text{ m}$  liegen, berechnet. Die Schrittweite ist in beide Richtungen gleich groß und beträgt  $\Delta x = \Delta z = 5\text{ mm}$ . An dieser Stelle ist anzumerken, dass bei der Simulation mit COMSOL kein Schalldruck in unmittelbarer Umgebung zu der umschließenden Fläche entnommen werden konnten. Aus diesem Grund sind die Werte des Schalldrucks in dem Bereich von  $-0.1\text{ m} \leq x \leq 0.1\text{ m}$  und  $0\text{ m} \leq z \leq 1\text{ mm}$  bei dem Model von COMSOL ungültig. Aus den Differenzen der beiden Berechnung geht hervor, dass der Schalldruck der beiden Modelle in den meisten Feldpunkten in der Ebene sehr gut übereinstimmen. Über fast den gesamten simulierten Bereich des Schalldruckpegels existiert eine Differenz von weniger als  $\pm 0,1\text{ dB}$ . Nur bei einem Öffnungswinkel, bei denen die Nulldurchgänge auftreten, sind die Unterschiede signifikant und betragen teilweise mehr als  $\pm 1,5\text{ dB}$ . Aufgrund der verwendeten gleichen physikalischen Parameter können die Unterschiede durch die Vernachlässigung der Dipole auf der Mantelfläche oder durch die Diskretisierung der Oberfläche und der verwendeten numerischen Verfahren entstehen.

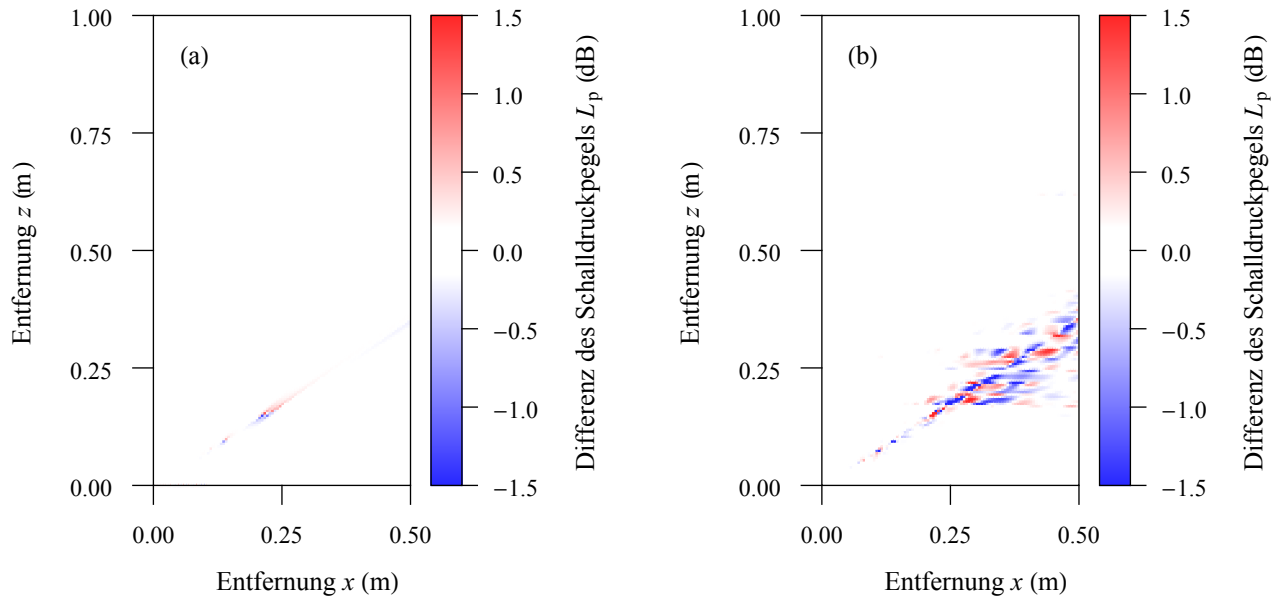
Hierbei kann vermutet werden, dass die vernachlässigten Dipole welche in tangentielle Richtung zur Oberseite der schallharten Wand stehen gerade einen Einfluss bei kleinen Schallfeldgrößen besitzen. Die Superposition der Monopole und Dipole ist bei der Simulation des Schalldrucks von wesentlicher Bedeutung. Ergeben sich bei dieser Superposition relativ kleine Werte für den Schalldruck, dann können zusätzliche Anteile große Fehler verursachen, auch wenn die Quellverteilung eigentlich sehr klein ist. Dieses Verhalten kann in der Darstellung bei dem Nulldurchgang entnommen werden. In diesem Zusammenhang haben beide Simulationen zwar den gleichen Nulldurchgang, jedoch ist dieser bei der Modellierung mit COMSOL größer beziehungsweise an einigen Stellen auch kleiner als die Lösung des Modells mit Mathematica. Jedoch kann nicht exakt quantifiziert werden wie groß der Fehler durch die Vernachlässigung der Dipole auf der Mantelfläche ist. Dieses liegt an den grundsätzlich verschiedenen Modellansätzen, welche sich zum einen in der Numerik und zum anderen in der Diskretisierung der Oberfläche auswirken.

Neben dem Einfluss der Dipole hat auch die unterschiedliche Diskretisierung und die verwendeten numerischen Verfahren einen Einfluss auf die Simulationsergebnisse. Leider gibt es keine analytische Lösung für die Berechnung des Schallfeldes mit einer finiten Abmessung der umgebenen schallharten Wand, sodass es nicht möglich ist einen Vergleich zu treffen welche Simulation sich besser eignet. Dennoch kann aufgrund der Symmetrie eine Überprüfung durchgeführt werden, ob das simulierte Schallfeld bezüglich der z-Ache symmetrisch ist und sich daher besser zum Simulieren des Schalldrucks eignet. Dazu



**Abbildung 3.20.:** Schallwellenausbreitung eines Ultraschallwandlers mit dem Radius  $a = 6.4\text{mm}$  in einer schallharten Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 100\text{mm}$ . Die Abbildungen zeigen den Schalldruckpegel für das BEM Modell in Mathematica (a), für das COMSOL Modell (b) und für die Differenz der beiden Modelle zueinander (c).





**Abbildung 3.21.:** Untersuchung der Symmetrie für die Modelle mit der BEM in Mathematica (a) und der BEM in COMSOL (b). Hierbei wird die Differenz des Schalldruckpegels für die gespiegelten Feldpunkte an der z-Achse gebildet.

werden die simulierten Schalldrücke aus dem Modell von Mathematica [Abbildung 3.20 (a)] und dem BEM Modell von COMSOL [Abbildung 3.20 (b)] an der Achse bei  $x = 0$  m gespiegelt. Hierbei muss der Schalldruck für die Feldpunkte bei negativen Distanzen  $x \leq 0$  m gleich den positiven Distanzen entsprechen. Aus diesem Grund wurde die Symmetrie der beiden simulierten Felder (Abbildung 3.21) untersucht. Es ist ersichtlich, dass das implementierte Modell in Mathematica eine bessere Symmetrie aufweist als die Simulation mit COMSOL. Zwar gibt es auch bei dem Modell [Abbildung 3.21 (a)] bei dem Nulldurchgang eine Unsymmetrie, diese ist aber äußerst schmal. Währenddessen zeigt sich bei den Simulationsergebnissen von COMSOL [Abbildung 3.21 (b)] ein deutlich größerer Bereich, in dem das Schallfeld nicht symmetrisch ist. Dadurch lässt sich schlussfolgern, dass die großen Unterschiede in den Nulldurchgängen eher durch die Unsymmetrie des Modells in COMSOL stammen als von den vernachlässigten Dipolen auf der Mantelfläche. Daher lässt sich nur ein Einfluss der Dipole außerhalb dieser Bereiche untersuchen. Hierbei stellt sich heraus, dass die vernachlässigten Dipole in dem entwickelten Modell in Mathematica einen abweichenden Schalldruckpegel von bis zu  $\pm 0,5$  dB zu dem entwickelten Modell in COMSOL verursachen. Aus diesem Grund kann davon ausgegangen werden, dass die Modelle im Wesentlichen äquivalent zueinander sind.

Abschließend werden noch die Rechenzeiten der beiden Modelle verglichen. Hierbei muss zwischen den beiden Schritten der Simulation unterschieden werden. Der erste beinhaltet die Simulation des Schalldrucks auf der Oberfläche des KHI's. Die Rechenzeit in Mathematica beträgt dafür  $t_r = 4088$  s und bei dem Modell in COMSOL ist  $t_r = 21707$  s. Im Anschluss daran werden die Schallfelder der Ebene berechnet, wodurch auch Zeit für die Berechnung benötigt wird. Diese lässt sich bei COMSOL nicht exakt ausgeben, jedoch wurde eine externe Messung durchgeführt, bei der die Rechenzeit  $t_r = 1272$  s ermittelt wurde. In Mathematica beträgt die Rechenzeit für die Schallfeldberechnung der Feldpunkte  $t_r = 193$  s.

Durch die bessere symmetrische Eigenschaft, die kürzere Rechenzeit und der Möglichkeit das Modell noch mit einer höheren Knotenanzahl pro Wellenlänge oder höheren Frequenz zu untersuchen, ist das entworfene Modell zur Simulation der Schallabstrahlung vorzuziehen. Hierbei ist der wesentliche Vorteil die physikalischen Eigenschaften genauer abzubilden als bei COMSOL. Dafür bietet COMSOL den Vorteil,

---

geometrische Anpassungen des Modells zu ermöglichen, während diese mit dem Modell in Mathematica eingeschränkt umsetzbar sind und sich auf ebene Geometrien beschränken.

---

### 3.5.3 Vergleich mit unendlich ausgedehnter Ebene

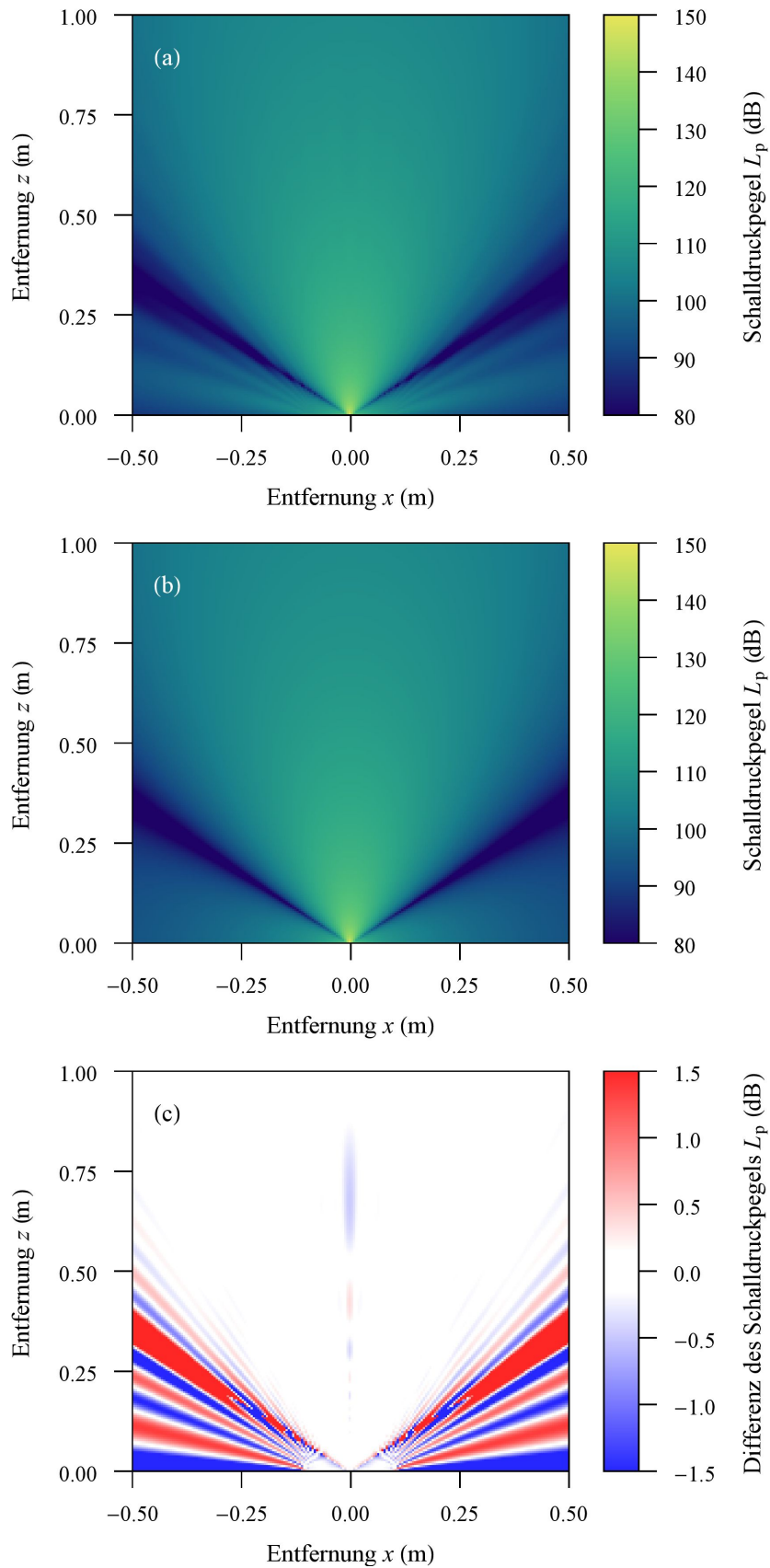
---

In diesem Abschnitt wird ein Vergleich zwischen der idealisierten Berechnung des Schallfeldes mit dem Rayleigh Integral und dem entwickelten Modell auf der Grundlage des KHI durchgeführt. Dabei wird untersucht, wie sich die veränderte Randbedingung durch die geometrische Begrenzung der schallharten Wand auf das resultierende Schallfeld auswirkt. Es werden sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede des Schallfeldes aufgezeigt und es wird dabei eine physikalische Begründung gegeben, woher diese stammen. Abschließend wird eine Abschätzung gegeben, für welche Problemstellungen sich das jeweilige Modell eignet.

Um einen möglichst genauen Vergleich der Modelle durchführen zu können, wurden die Schallfeldberechnungen mit dem Rayleigh Integral anhand der numerischen Integration vollzogen. Diese Methode hat in den bisherigen Analysen den geringsten Fehler in Bezug auf die analytischen Lösungen aufgewiesen (Kapitel 3.3) und wurde daher für die Berechnung ausgewählt. Hierbei wurde die Integrationstechnik nach Gauß-Kronrod verwendet. Die Berechnung des Schallfeldes erfolgte für beide Modelle in der xz-Ebene, wobei der Bereich dem der bisherigen Analysen (Kapitel 3.3 und 3.5) entspricht. Die simulierten Schallfelder des Modells mit der vorgegebenen Größe der schallharten Wand [Abbildung 3.22 (a)] und des Rayleigh Integrals [Abbildung 3.22 (b)] zeigen für die Hauptkeule sowohl in der Form als auch in den Werten des Schalldrucks eine sehr gute Übereinstimmung. Währenddessen unterscheiden sich die Modelle in der Nebenkeule und dem Nulldurchgang. Deutlich werden die Unterschiede bei der Bildung der Differenz des Schalldruckpegels von den beiden Modellen [Abbildung 3.22 (c)]. In dieser Darstellung wird ersichtlich, in welchen Bereichen es Gemeinsamkeiten gibt und wo sich die Modelle unterscheiden. Der Schalldruckpegel ist für beide Modelle mit einem Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 50^\circ$  ungefähr gleich und die Abweichung des Schalldruckpegels beträgt maximal  $\pm 0,5$  dB, wobei sich die Unterschiede mit zunehmenden Öffnungswinkel vergrößern. Auch in der unmittelbaren Umgebung zur schallharten Wand sind die beiden Modelle in einer sehr guten Übereinstimmung. Im Gegensatz dazu sind die Schallfelder innerhalb und um den Nulldurchgang, was einem Bereich  $\vartheta = \pm 53^\circ$  bis  $\vartheta = \pm 64^\circ$  entspricht, sehr verschieden. Die beiden Modelle differieren in diesem Bereich um mehr als  $\pm 1,5$  dB. Mit weiter steigenden Öffnungswinkel sind Unterschiede zwar noch vorhanden, jedoch sind diese nicht mehr so stark ausgeprägt und betragen weniger als  $\pm 1,5$  dB. Außerdem treten die Unterschiede nicht willkürlich auf, sondern liegen nach einer gewissen Struktur vor. Hierbei oszillieren die Unterschiede mit zunehmenden Öffnungswinkel. Nur in der Nähe der schallharten Wand wird der Fehler wieder signifikant größer. Der Unterschied des Schalldruckpegels beträgt maximal 6 dB bei den Feldpunkten  $z = 0$  m, die sich außerhalb der schallharten Wand befinden.

Die auftretenden Unterschiede und Gemeinsamkeiten lassen sich physikalisch durch die Dipolverteilung über die Oberfläche erklären. Während beim Rayleigh Integral die Dipole auf einer unendlich ausgedehnten Fläche verteilt sind, existieren die Dipole bei dem Modell auf der Basis des KHI's (Kapitel 3.5) nur auf der schallharten Wand und sind damit räumlich begrenzt. Durch die Begrenzung der Dipolverteilung wird die Normalenkomponente der Schallschnelle außerhalb der schallharten Wand nicht mehr zu null, wodurch sie auch in negative z-Richtung eindringen kann. Anhand der fehlenden Dipole außerhalb der schallharten Wand wird der Schalldruck in einigen Bereichen des Volumens signifikant verändert. Die Dipole haben im Gegensatz zu den Monopolen eine Richtwirkung, welche durch das Skalarprodukt aus der Flächennormalen und dem normierten Abstandsvektor gebildet wird. Durch diese Richtwirkung und der daraus resultierenden Interferenz, wird der Wechsel zwischen den positiven und negativen Schwan- kungen zwischen den Modellen erzeugt. Hierbei wirkt sich die Interferenz konstruktiv oder destruktiv bezogen auf das Rayleigh Integral aus. Besonders deutlich wird die Richtwirkung der Dipole, bei den Feldpunkten in der Ebene bei  $z = 0$  m und außerhalb der schallharten Wand. In dieser Ebene haben die Dipole keinen Einfluss, sodass das Schallfeld ausschließlich durch die Monopole gebildet wird. Weil





**Abbildung 3.22.:** Charakteristische Schallwellenausbreitung eines Ultraschallwandlers mit dem Radius  $a = 6.4 \text{ mm}$  in einer finiten schallharten Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 100 \text{ mm}$  (a) und einer idealisierten unendlich ausgedehnten Ebene (b). Abbildung (c) zeigt den Unterschied des Schalldruckpegels von den beiden Modellen zueinander.

---

diese jedoch um den Faktor zwei kleiner als beim Rayleigh Integral sind, ist der Schalldruckpegel um 6 dB kleiner. Im Bereich des Öffnungswinkels von  $\vartheta = \pm 50^\circ$  besitzen die Dipole noch einen ausreichend großen Anteil durch ihre Richtwirkung, sodass für die Feldpunkte in diesem Bereich die Lösung gut mit dem Rayleigh Integral übereinstimmt. Ebenso wirken die Dipole in unmittelbarer Nähe der schallharten Wand, sodass auch hier die Schallfelder der beiden Simulationen gut übereinstimmt.

Durch die Unterschiede der beiden Modelle ist ersichtlich, dass das Modell mit dem Rayleigh Integral eine idealisierte Berechnungsmöglichkeit darstellt. Die Berechnung mit dem KHI ist hingegen allgemeingültig und kann für beliebige geometrische Anordnungen verwendet werden. Aufgrund der praktischen Anwendungen ist es jedoch sinnvoller das Modell mit der exakten Geometrie zu simulieren. Dadurch ist die Schallfeldberechnung besser an die Realität angenähert und die Simulationsergebnisse bilden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten besser ab. Jedoch ist die Simulation mit dem KHI aufwendiger durchzuführen als mit dem Rayleigh Integral. Deshalb sollte eine Abschätzung getroffen werden, für welche Feldpunkte der Schalldruck simuliert werden soll. Befindet sich der Schalldruck innerhalb eines Öffnungswinkel von  $\vartheta = \pm 50^\circ$  ist es ausreichend das Rayleigh Integral zu verwenden, weil es in diesem Bereich unwesentlich von dem KHI abweicht. Durch die einfachere Berechnung ist daher die Simulation mit dem Rayleigh Integral zu empfehlen. Soll hingegen das Feld gesamtheitlich simuliert werden, ist es unerlässlich die Berechnung mit dem KHI durchzuführen, um möglichst realitätsnahe Schalldruckwerte zu ermitteln.

---

### 3.6 Bewertung der Berechnungsmethoden

---

In dem Kapitel 3 wurden verschiedene Modelle zur Simulation des Schalldrucks entwickelt. Die unterschiedlichen Modelle werden in diesem Abschnitt der Arbeit kurz gegenübergestellt und deren Stärken und Schwächen erläutert. Dabei wird zunächst zwischen den zwei grundsätzlichen Modellansätzen unterschieden. Die meisten entwickelten Modelle basieren auf dem Rayleigh Integral und haben damit die wesentliche Einschränkung, dass sich idealerweise die Schallquelle in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand befindet. Auf dem KHI basierend wurde dann ein neues an die Realität angepasstes Modell entwickelt, mit dem die genaue Abmessung der schallharten Wand berücksichtigt wird. Hierbei wurden ausführlich die Unterschiede zwischen dem kommerziellen Programm COMSOL und dem eigenen entwickelten Modell dargestellt (Kapitel 3.5.2). Auch die Unterschiede zwischen dem Rayleigh Integral und dem Modell basierend auf dem KHI wurden erläutert (Kapitel 3.5.3). Aufgrund des dort ausführlich erläuterten Vergleichs wird auf diese Modellansätze an dieser Stelle nicht weiter eingegangen, sondern es werden nur die Modelle die auf dem Rayleigh Integral oder der FEM basieren bewertet und abschließend eine Empfehlung für die Simulationen gegeben.

Zuerst wurde ein Modell mit der FEM in COMSOL (Kapitel 3.2.1) aufgebaut. Hierbei zeigte sich, dass sich die Berechnung eines vollwertigen dreidimensionalen Modells, auch mit einem kleinen Volumen, nicht durchführen lässt. Die Ursache hierfür ist die benötigte Anzahl von Knoten pro Wellenlänge, die bei einer Frequenz von  $f = 40 \text{ kHz}$  in dem Medium Luft sehr groß ist. Das wesentliche Problem ist hierbei die Lösung des resultierenden Gleichungssystems aus der Anzahl dieser Elemente. Dennoch konnte eine Simulation für rotationssymmetrische Formen durchgeführt werden. Die Simulation zeigte für quadratische Elemente eine bessere Konvergenz als bei linearen Elementen. Die Genauigkeit nimmt hierbei mit zunehmender Anzahl der Knoten pro Wellenlänge zu, währenddessen der Zeitaufwand und der Speicherbedarf quadratisch wächst. Ein Vorteil der Verwendung der FEM mit COMSOL ist die schnelle Modellerstellung, mit der auch beliebige Geometrien erzeugt werden können. Auch eine Anpassung an veränderte Randbedingungen lässt sich mit dem erstellten Modell einfach realisieren. Des Weiteren können multiphysikalische Phänomene untersucht werden, welche jedoch in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Nachteilhaft ist hingegen die komplette Diskretisierung des Gebiets bei der Nutzung der FEM. Werden relativ große Schallfelder mit einer hohen Genauigkeit simuliert, wird entsprechend viel Arbeitsspeicher benötigt und die Rechenzeit ist länger. Die FEM mit COMSOL eignet sich aus diesem Grund nur für die Simulation von komplexen Geometrien, die in ein relativ kleines Volumen abstrahlen,

---

oder komplexe Räume beinhalten. Die Simulation des Schalldrucks für einen einzelnen Punkt ist unverhältnismäßig, weil der Aufwand hierfür zu groß ist. Daher empfiehlt es sich mit der FEM nur ganze Schallfelder zu simulieren.

Ein weiteres verwendetes Simulationstool ist Field II (Kapitel 3.2.2), welches sehr häufig für die Simulation von Ultraschallfeldern verwendet wird. Das grundsätzliche Konzept dieses Programmpakets, welches für MATLAB entwickelt wurde, ist die räumliche Sprungantwort für das Rayleigh Integral im Zeitbereich. In diesem Programmpaket gibt es sehr viele vordefinierte Funktionen, sodass auch hier der Aufbau eines Modells einfach erfolgen kann. Im Gegensatz zum Modell in COMSOL, beschränkt jedoch eine unendlich ausgedehnte Ebene die geometrische Vielfalt des Modells. Dabei können in dieser Ebene für die Ultraschallwandler beliebige Formen und unterschiedliche Amplituden verwendet werden. Die Berechnung eines Schallfeldes kann sehr schnell durchgeführt werden, wodurch es sich gut zur Simulation des verwendeten Standardfalls mit 40401 Feldpunkten eignet. Die Rechenzeit für diesen Fall betrug  $t_r = 39,9$  s. Jedoch ist die Berechnung nur bedingt so schnell durchzuführen, weil eine Konvergenzanalyse sowohl für die zeitliche Abtastung als auch für die räumliche Diskretisierung durchgeführt werden muss. Um dieses zu gewährleisten müssen beide Einflüsse untersucht werden, wodurch ein sehr großer Rechenaufwand entsteht. Für die z-Achse wurde solche Überprüfung durchgeführt, wobei sich herausgestellt hat, dass ungünstige Kombinationen einen großen Fehler verursachen. Selbst dann wenn für beide eine hohe Auflösung verwendet wird. Aus diesem Grund ist Field II dann eine gute Wahl, wenn die Diskretisierung und Abtastfrequenz für den konvergierten Fall bekannt ist und nur die Simulation durchgeführt werden soll.

Darauffolgend wurde das Schallfeld mithilfe der direkten numerischen Integration des Rayleigh Integrals (Kapitel 3.3) simuliert. Bei diesen Simulationen wurden verschiedene Integrationstechniken angewendet, wobei sich gezeigt hat, dass alle Varianten mit Ausnahme der Monte-Carlo-Technik sehr genau ablaufen. Hierzu wurde auch eine Fehlerbetrachtung mit einer analytischen Lösung durchgeführt. Jedoch werden für die Lösungsverfahren unterschiedliche Rechenzeiten benötigt. Hierbei hat sich herausgestellt, dass die Technik nach Gauß-Kronrod am schnellsten ausgeführt werden kann. Die benötigte Rechenzeit  $t_r$  betrug für den Testfall mit 40401 Feldpunkten 43,8 s. Eine hohe Genauigkeit und eine relativ kurze Rechenzeit sind die Vorteile dieser Methode. Dennoch gibt es einen wesentlichen Nachteil, der durch die Geometrie des Kolbenstrahlers entsteht. Die numerische Integration in Mathematica erfordert eine parametrisierte Fläche. Diese zu ermitteln ist bei komplexen Formen sehr aufwendig und es besteht auch die Möglichkeit, dass keine parametrische Form ermittelt werden kann.

Zuletzt wurde ein paralleler Programmcode entwickelt, mit dem beliebige Formen von Ultraschallwandlern simuliert werden können. Hierbei ist für die Diskretisierung der Wandleroberfläche der DistMesh-Algorithmus verwendet worden. Der größte aufgetretene Fehler ist zwar größer als bei der Berechnung mit der numerischen Integration, aber er kann bei geeigneter Wahl der Diskretisierung und der Gauß'schen Quadratur unter die geforderten  $\varepsilon_z = \pm 12\%$  und sogar unter  $\varepsilon_z = \pm 1\%$  liegen. Für die Diskretisierung mit 2042 Dreiecken und der Quadratur mit sieben GP beträgt der größte absolute Fehler  $|\varepsilon_z| = 0,53\%$ . Mit dieser Diskretisierung wurde auch der Schalldruck in der xz-Ebene mit den selben Feldpunkten berechnet und die benötigte Rechenzeit mit der GPU beträgt 1,17 s. Aus diesem Grund kann der Schalldruck für große Felder in nahezu Echtzeit berechnet werden und es liegt hierbei noch ein relativ kleiner Fehler vor. Der Nachteil dieser Methode ist in dieser Version des Programmcodes noch die externe Gittererzeugung, die für die jeweilige Form erstellt werden muss.

Die gezeigten Simulationenmethoden haben ihre Vorteile und Nachteile gegenüber den übrigen Methoden. Hierbei ist COMSOL mit der FEM das zu wählende Simulationstool, wenn komplexe Geometrien und Volumen vorliegen und die Schallabstrahlung in einen kleinen Raum erfolgt. Wenn die Schallfeldberechnung für eine kleine Anzahl von Feldpunkten erfolgt und die Ergebnisse äußerst genau sein sollen, dann empfiehlt es sich die numerische Integration zu verwenden. Für die Simulation einer großen Anzahl von Feldpunkten und einem Fehler der kleiner als 1% ist, kann das numerische Modell mit der Berechnung über die GPU hervorragend benutzt werden.

---

## 4 Schallfeldberechnung von beliebigen Ultraschallwandler-Konfigurationen

---

In den vorherigen Betrachtungen wurden eigene theoretische Modelle zur Schallfeldberechnung entwickelt und in Mathematica implementiert. Die berechneten Simulationsergebnisse von diesen Modellen konnten mit analytischen Lösungen oder mit anderen numerischen Modellen verifiziert (Kapitel 3.4.4) oder validiert (Kapitel 3.5.2) werden. In diesem Kapitel werden die entwickelten Modelle verwendet um den Schalldruck von verschiedenen Ultraschallwandlern zu simulieren. Dazu werden zunächst zwei Ultraschallwandler vorgestellt und in ihren physikalischen und geometrischen Eigenschaften kurz beschrieben. Anschließend wird ein Modellansatz aus der Literatur präsentiert, mit dem der Schalldruck für koaxiale Wandlerkonfigurationen berechnet werden kann. Hierbei wird das auf dem Rayleigh Integral basierende Modell angepasst, weil auch der Empfänger eine geometrische Ausdehnung besitzt und diese in dem bisherigen Modell berücksichtigt werden soll. Für dieses Modell werden numerische Integrationen durchgeführt und die Unterschiede zu den bisherigen Modellen erläutert. Im Anschluss werden die Ultraschallwandler in ihrer koaxialen Schallabstrahlung charakterisiert. Hierzu wird der zur Verfügung stehende Messplatz vorgestellt und der Ablauf der Messungen beschrieben. Die Methode zur Berechnung des Schalldrucks für die koaxiale Anordnung der Wandler wird dann auf eine beliebige Lage und Orientierung der Wandlerkonfigurationen erweitert. Dazu wird zum einen eine theoretische Betrachtung zum Einfluss des Empfängers anhand des Rayleigh Integrals durchgeführt. Zum anderen erfolgt die Erweiterung des Modells auf der Grundlage des KHI's (Kapitel 3.5), sodass in den Schallfeldsimulationen die geometrische Ausdehnung des Empfängers berücksichtigt wird. Abschließend wird das an die realen Bedingungen angepasste Modell mithilfe von Schallfeldmessungen validiert.

---

### 4.1 Eigenschaften der Ultraschallwandler für die Simulation der Schallausbreitung

---

In dieser Arbeit wurden für die Schallfeldberechnung und Charakterisierung zwei kommerziell erhältliche Ultraschallwandler verwendet. Für die durchzuführenden Simulationen sind im Wesentlichen drei Eigenschaften der Ultraschallwandler wichtig. Dazu gehören die Erregungsfrequenz, die Auslenkung beziehungsweise die Schallschnelle und die geometrische Abmessung der akustischen Apertur. Aus diesem Grund werden im Folgenden die zwei Ultraschallwandler kurz anhand ihrer Datenblätter beschrieben und die für die Simulation notwendigen Merkmale herausgearbeitet.

Der erste Ultraschallwandler ist ein MA40B8S (Murata Manufacturing Co., Ltd., Nagaokakyo, Kyoto, Japan). Dieser hat ein zylinderförmiges Gehäuse mit einem Außendurchmesser von  $16 \pm 0,5$  mm und einer Höhe von 12 mm [75]. Der Mantel ist aus Aluminium gefertigt und auf der Oberseite befindet sich ein Gitter, durch das die erzeugte Schallwelle austritt. Die akustische Wandlung des angelegten elektrischen Signals erfolgt durch eine kreisrunde Piezokeramik, die sich im Inneren des Gehäuses befindet. Hierbei wird das Material in Schwingung versetzt, sodass dadurch eine Schallwelle entsteht. Zur besseren Einkopplung in das Medium ist in der Mitte der Piezokeramik ein leicht gebogenes Horn aufgeklebt [76]. Die Mittenfrequenz liegt bei  $f = 40$  kHz [75] und mit ungefähr dieser wird der Ultraschallwandler bei den Messungen angeregt.

Für die Simulation dieses Ultraschallwandlers ist es wichtig diese Frequenz, die Auslenkung auf der Oberfläche der Piezokeramik und die Öffnung des Gehäuses zu berücksichtigen. Die Öffnung des Gehäuses auf der Oberseite des Ultraschallwandlers hat der Hersteller nicht angegeben, sodass diese mit einem Radius von  $a \approx 6,4 \pm 0,05$  mm vermessen wurde. Leider gibt es auch keine Herstellerangaben zur Auslenkung der Piezokeramik bei einer angelegten Wechselspannung, sodass diese wesentliche Randbedingung für die Schallschnelle nicht bekannt ist. Durch weitere Untersuchungen und Messungen sollten daher die räumlichen und zeitlichen Verläufe der Schallschnelle auf der Piezokeramik beziehungsweise dem Horn ermittelt werden, damit die Simulation durch das Modell möglichst gut die physikalischen Eigenschaften des realen Ultraschallwandlers abbildet. Jedoch war eine Vermessung der Schallschnelle auf

---

der Wandleroberfläche zum Zeitpunkt dieser Arbeit nicht möglich. Dennoch werden die Simulationen unter der Annahme, dass sich die Schallschnelle über die Oberfläche des Gehäuses homogen verteilt, durchgeführt. Diese Annahme ist begründet durch die Lage der Piezokeramik und des Horns innerhalb des Gehäuses, sodass von einem angenäherten Kolbenstrahlermodell ausgegangen werden darf. Daher werden die weiteren Berechnungen mit einer Schallschnelle  $v_n = 1 \text{ ms}^{-1}$  durchgeführt.

Der zweite verwendete Ultraschallwandler ist ein SensComp600 (SensComp, Inc., Livonia, Michigan, USA). Im Gegensatz zu dem ersten Ultraschallwandler handelt es sich hierbei um einen kapazitiv gekoppelten Ultraschallwandler. Dadurch wird für die elektrisch-akustische Wandlung zunächst eine Gleichspannung von 200 V angelegt [77]. Diese Gleichspannung wird mit einer Wechselspannung überlagert, sodass durch diese eine Folie auf der Oberseite in Schwingung gerät. Hierbei ist ein wichtiger Unterschied zu dem ersten Ultraschallwandler, dass die Folie flexibel ist und sich daher nicht exakt wie ein Kolbenstrahler verhält. Dennoch wird davon ausgegangen, dass die maximale Wölbung der Folie und damit die Richtungsänderung der Schallschnelle gering ist, sodass trotzdem mit dem Modell des Kolbenstrahlers gerechnet werden kann. Ansonsten besteht in dem Modell auch die Möglichkeit eine Veränderung sowohl der Phasenlage als auch der Amplitude vorzunehmen. Dafür müsste dann die Schallschnelle auf der Folienoberfläche zunächst vermessen und anschließend in den Programmcode implementiert werden. Jedoch stehen auch für diesen Fall keine gemessenen Verteilungen der Schallschnelle zur Verfügung, sodass auch für diesen Ultraschallwandler von einer homogenen Schallschnelle auf der Oberfläche von  $v_n = 1 \text{ ms}^{-1}$  ausgegangen wird.

Zum Schutz vor äußeren Einflüssen befindet sich dieser Ultraschallwandler in einem Gehäuse. Dieses ist ebenfalls kreisförmig und besitzt laut Herstellerangaben einen Außenradius von  $a = 21,5 \text{ mm}$  und eine Höhe von  $11,7 \text{ mm}$  [77]. Bei diesem Ultraschallwandler ist die Oberseite aus Edelstahl gefertigt, die im Übrigen als zweite Elektrode verwendet wird. Sie besitzt ähnlich zum ersten Ultraschallwandler Löcher im Gehäuse, sodass sich die Schallwelle von der Folienoberfläche in den Raum ausbreiten kann. Die Löcher sind hierbei sehr klein und engmaschig, sodass der Schall gut entweichen kann. Die räumliche Ausdehnung der Löcher auf der Oberseite des Gehäuses, welche den akustischen Aperturen entsprechen, ist vom Hersteller mit einem Radius  $a = 19,2 \text{ mm}$  [77] angegeben. Jedoch ergaben mehrere Messungen, dass dieser etwas zu groß für den zur Verfügung stehenden Ultraschallwandler ist. Der gemessene Radius der akustischen Apertur beträgt nur  $18,2 \text{ mm}$ . Aus diesem Grund wird für die Schallfeldberechnungen der gemessene Radius verwendet.

Im Gegensatz zum MA40B8S ist dieser Ultraschallwandler breitbandig und kann in einem Frequenzbereich von  $20 \text{ kHz}$  bis  $100 \text{ kHz}$  verwendet werden [77]. Der maximale Schalldruckpegel wird bei einer Frequenz  $f = 50 \text{ kHz}$  erreicht. Bei einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  ist der Schalldruckpegel um ungefähr  $5 \text{ dB}$  kleiner. Aufgrund des Vergleichs der beiden Ultraschallwandler werden diese mit der selben Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  betrachtet.

Neben diesen beiden Ultraschallwandlern sind eine Vielzahl weiterer Ultraschallwandler mit unterschiedlichen Formen und physikalischen Wirkprinzipien erhältlich. Jedoch ist es nicht möglich und auch sinnvoll sämtliche Ultraschallwandler in dieser Arbeit zu simulieren und charakterisieren. Ziel dieser Charakterisierung ist die Validierung des entwickelten Modells mit den zwei exemplarisch ausgewählten Ultraschallwandlern. Im späteren Verlauf dieser Arbeit wird ein Ultraschall Gruppenwandler (Kapitel 5), der aus 64 MA40S4S besteht, simuliert und anschließend messtechnisch charakterisiert. Die dafür verwendeten Ultraschallwandler entsprechen im allgemeinen Verhalten dem MA40B8S [76], nur dass dieser aus einem Kunststoff gefertigten Gehäuse und einer kleineren Abmessung besteht.

---

## 4.2 Koaxiale Wandlerkonfigurationen

---

Die bisherigen entwickelten Modelle können sehr gut zur theoretischen Berechnung des Schalldrucks in einem dreidimensionalen Raum verwendet werden. Jedoch existiert für die Validierung des Modells eine messtechnische Problemstellung. Die entwickelten Modelle berücksichtigen den Schalldruck für einen einzelnen Feldpunkt, während bei der Messung ein Mikrofon verwendet wird. Dieses Mikrofon



hat im Gegensatz dazu eine geometrische Ausdehnung, sodass die Schallwelle nicht auf einen einzelnen Punkt, sondern auf einer Fläche gemessen wird. Deshalb wird im Folgenden das Modell erweitert, sodass mit dieser Erweiterung der Unterschied zwischen den punktförmigen und flächenbehafteten Empfänger behoben wird. Dazu wird zunächst eine koaxiale Anordnung von Ultraschallwandlern vorgestellt und anschließend vermessen. Hierbei werden die Unterschiede zwischen den bisherigen Modellansätzen (Kapitel 3) und den an die Messung angepassten Modell physikalisch erläutert. Der grundsätzliche Ansatz für die Schallfeldsimulation von koaxialen Anordnungen der Sender und Empfänger wird im weiteren Verlauf der Arbeit (Kapitel 4.5) auf das bisherige Modell übertragen. Dadurch kann der Schalldruck für beliebige Positionen und Orientierungen der Sender und Empfänger zueinander berechnet werden. Der wesentliche Ansatz zur Berücksichtigung der Empfangsapertur ist die Mittelung des Schalldrucks über dessen Fläche [14]. Hierbei kann zwar jede beliebige Form gewählt werden, dennoch wird wegen des verwendeten Mikrophons eine kreisförmige Fläche verwendet. Ein kleiner Nachteil dieses Ansatzes ist die fehlende Rückwirkung des Empfängers auf die Schallquelle. Jedoch wird diese als klein angenommen, weil die doppelte Weglänge zurückgelegt werden muss und damit der Schalldruck deutlich geringer auf die Schallquelle wirkt. Dabei ist die Rückwirkung umso kleiner, je weiter sich der Empfänger von dem Sender entfernt befindet. Darüber hinaus kann durch ein gepulstes Signal der absolut wirkende Einfluss auf den Schalldruck im gemessenen Raumpunkt reduziert werden. Daher kann die Rückwirkung durch das Mikrophon auf den Ultraschallwandler vernachlässigt werden.

Die Mittelung des Schalldrucks über die Apertur des Empfängers wird durch das Integral

$$\bar{p}(\vec{r}_p) = \frac{1}{\pi b^2} \iint_{F_b} p(\vec{r}_p) dF \quad (4.1)$$

ausgedrückt [14]. Trotz der Berechnung des gemittelten Schalldrucks, muss die Positionierung des Mikrophons anhand eines Raumpunktes vorgegeben werden. Dabei wird sich in dieser Arbeit immer auf den Mittelpunkt des Kreises von dem Empfänger bezogen und die umgebene Fläche bildet dann den Mittelwert für diesen Feldpunkt. Der in dem Integral verwendete Radius  $b$  entspricht dem Radius der Empfangsapertur und  $F_b$  beschreibt die Integration über die kreisförmige Empfangsfläche. Das Ergebnis des gemittelten Schalldrucks wird durch  $\bar{p}(\vec{r}_p)$  angegeben. Wie bereits gezeigt wurde (Kapitel 3.5.3), kann das Rayleigh Integral für einen Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 50^\circ$  verwendet werden. Aus diesem Grund wird das Rayleigh Integral nach der Gleichung (2.40) in die Gleichung für den Mittelwert eingesetzt, sodass sich der gemittelte Schalldruck

$$\frac{\bar{p}(\vec{r}_p)}{p_{\text{ober}}} = \frac{jk}{2\pi^2 b^2} \iint_{F_a} \iint_{F_b} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} dF_b dF_a \quad (4.2)$$

für koaxiale Sender und Empfänger Konfigurationen ergibt [14]. Dieses vierfach Integral lässt sich nicht analytisch lösen und daher bietet sich keine Möglichkeit die Ergebnisse zu verifizieren. Jedoch konnten über Substitutionen die Ordnung des Integrals reduziert werden. Hierbei zeigt sich, dass sich das Integral

$$\frac{\bar{p}(\vec{r}_p)}{p_{\text{ober}}} = e^{-jkz_p} - \frac{2a^2}{\pi b^2} \int_{\zeta=1-\frac{b}{a}}^{1+\frac{b}{a}} \sqrt{1 - \left( \frac{a^2 - b^2 + a^2 \zeta^2}{2a^2 \zeta} \right)^2} e^{-jk\sqrt{a^2 \zeta^2 + z_p^2}} d\zeta \quad (4.3)$$

gut numerisch berechnen lässt [14]. Dieses Integral beinhaltet die Bedingung  $b \leq a$ . Alternativ kann auch der Radius des Empfängers größer als der Sender sein, dann muss jedoch das gezeigte Integral angepasst werden. Jedoch werden in dieser Arbeit keine Empfänger verwendet, die größer als der Sender sind. Aus diesem Grund reicht das dargestellte Integral nach der Gleichung (4.3) für die

---

weiteren Berechnungen aus. Die notwendige numerische Integration wurde mit der Integrationstechnik nach Gauß-Kronrod durchgeführt, weil diese Methode für Berechnung des Rayleigh Integrals am geeignetsten war (Kapitel 3.3).

Im Folgenden wird der gemittelte Schalldruck exemplarisch für einen Ultraschallwandler mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  berechnet. Hierbei soll zunächst theoretisch der Einfluss des flächenbehafteten Empfängers erläutert werden. Es wurden die Radien  $b = 1,5 \text{ mm}$ ,  $b = 3,0 \text{ mm}$  und  $b = 6,4 \text{ mm}$  für den Empfänger ausgewählt. Darüber hinaus wird auch ein Vergleich zur Berechnung mit dem Rayleigh Integral gezogen, wodurch der Punktempfänger mit dem Radius  $b = 0 \text{ mm}$  dargestellt ist. Auch die Veränderung des gemittelten Schalldrucks für verschiedene Frequenzen wird analysiert. Hierfür wurden die Frequenzen  $f = 40 \text{ kHz}$ ,  $f = 80 \text{ kHz}$  und  $f = 160 \text{ kHz}$  verwendet.

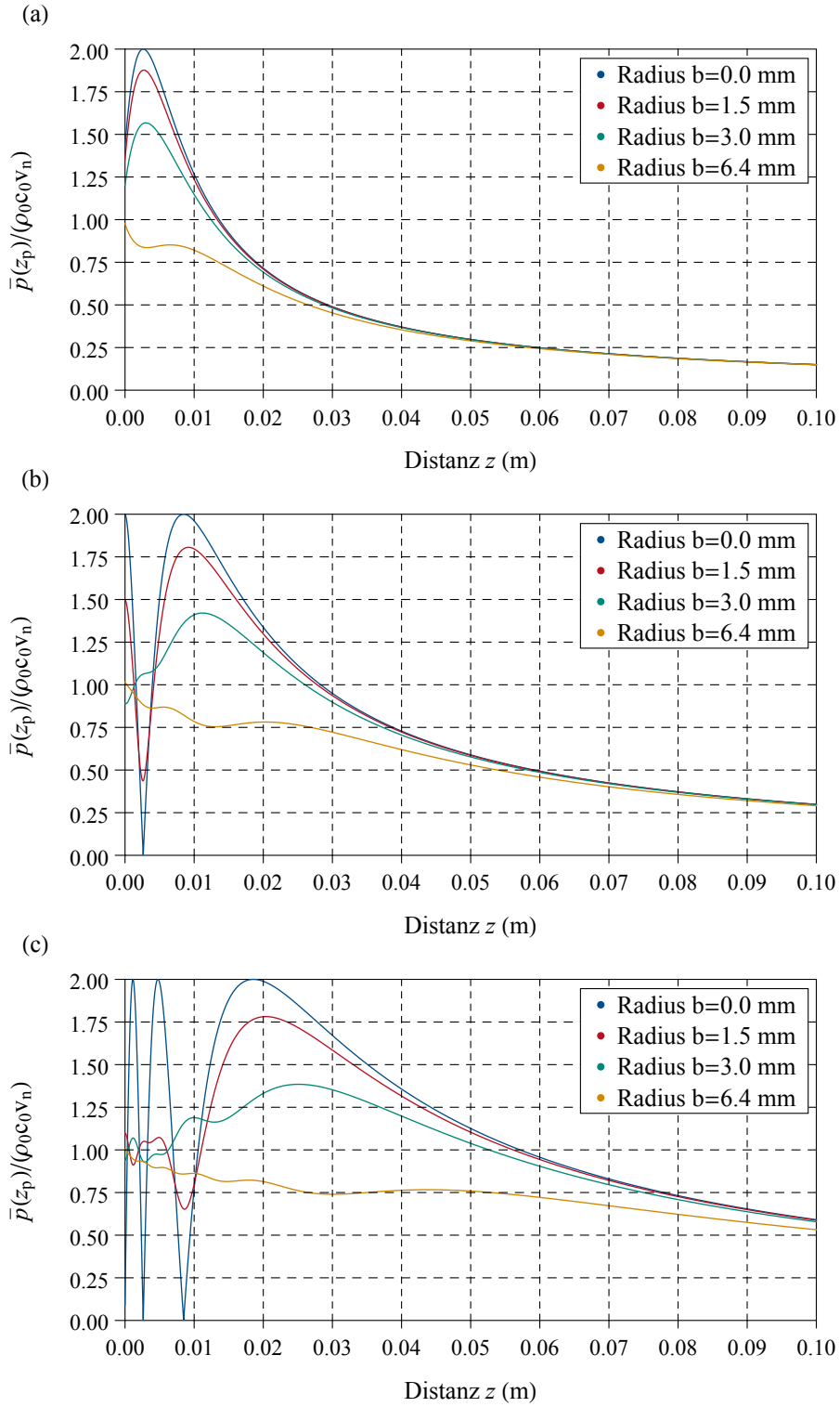
Es zeigt sich, dass der gemittelte Schalldruck nur eine wesentliche Abhängigkeit von der Empfangsapertur bei kurzen Entfernungen zwischen dem Sender und Empfänger aufweist. Bei größeren Distanzen sind die Unterschiede zwischen dem punktförmigen Empfänger und dem gemittelten Schalldruck gering und haben daher eine untergeordnete Bedeutung. Aus diesem Grund umfasst der Vergleich nur eine kurze Distanz von  $0,1 \text{ m}$  zwischen den beiden Aperturen.

Durch die Größe der Empfangsapertur wird der gemittelte Schalldruck im Nahfeld und auch etwas darüber hinaus wesentlich beeinflusst (Abbildung 4.1). Bei einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  [Abbildung 4.1 (a)] wirkt sich die Empfangsapertur mit einem Radius  $b = 1,5 \text{ mm}$  noch nicht so stark aus wie mit dem größten Radius  $b = 6,4 \text{ mm}$ . Hierbei entsprechen bei einer kleinen Empfangsfläche die gemittelten Schalldruckwerte noch ungefähr dem Rayleigh Integral. Jedoch zeigt sich auch, dass die Amplitude nicht mehr so stark ausgeprägt ist wie beim Rayleigh Integral. Das Maximum für den Radius  $b = 1,5 \text{ mm}$  ist im Vergleich zum Rayleigh Integral um  $3,9\%$  kleiner, während bei einem Radius  $b = 3,0 \text{ mm}$  die Reduzierung des Maximums ungefähr  $21,7\%$  beträgt. Eine Besonderheit ist der Radius  $b = 6,4 \text{ mm}$ , weil sich bei diesem nahezu kein Maximum mehr ausbildet, sondern der gemittelte Schalldruck in dem Nahfeld und ein wenig darüber hinaus fast konstant verläuft. In größerer Entfernung zwischen dem Sender und Empfänger, welche ab  $5 \text{ cm}$  beginnt, nähern sich die Schalldruckwerte dem Schalldruck des Rayleigh Integrals an.

Die Empfangsapertur wirkt sich bei der Frequenz  $f = 80 \text{ kHz}$  [Abbildung 4.1 (b)] noch stärker auf den gemittelten Schalldruck im Nahfeld aus. Dabei wird der Schalldruck eigentlich nur noch mit der Empfangsapertur von  $b = 1,5 \text{ mm}$  dem Rayleigh Integral angenähert und ähnelt daher in dem grundsätzlichen Verlaufs dem Schalldruck entlang der  $z$ -Achse. Jedoch zeigt sich auch für diesen Fall, dass die Extremwerte nicht mehr so deutlich ausgeprägt sind. Der Nulldurchgang des Schalldrucks auf der  $z$ -Achse kann nicht durch die Mittelung erreicht werden und auch das Maximum ist für diesen Fall um ungefähr  $9,9\%$  kleiner. Hinzu kommt, dass das Maximum sich in einer etwas größeren Entfernung als beim Rayleigh Integral befindet. Bei der Empfangsapertur mit dem Radius  $b = 3,0 \text{ mm}$  bildet sich nicht mehr die charakteristische Verlaufsform des Schalldruckes wie bei der analytischen Lösung aus. Nur das letzte Maximum entspricht ungefähr dem Schalldruck der analytischen Lösung, aber dieses bildet sich nicht an der selben Stelle, sondern erst in einer ungefähr  $3 \text{ mm}$  größeren Entfernung aus. Darüber hinaus ist dieser maximale Schalldruck um  $29\%$  kleiner. Bei gleich großem Sender und Empfänger gibt es im Nahfeld keine Gemeinsamkeit mehr mit dem Rayleigh Integral. Im Wesentlichen verläuft der gemittelte Schalldruck konstant und weist nur geringfügige Schwankungen auf. Ab einer großen Distanz zwischen dem Sender und Empfänger, welche ungefähr bei  $10 \text{ cm}$  beginnt, nähern sich auch diese Lösungen dem Rayleigh Integral an.

Zuletzt werden die Verläufe für die Frequenz  $f = 160 \text{ kHz}$  [Abbildung 4.1 (c)] untersucht. Hierbei sind mit keiner der verwendeten Empfangsaperturen der gemittelte Schalldruck in unmittelbarer Umgebung des Senders ähnlich zum Rayleigh Integral. Der Verlauf des Schalldrucks nähert sich erst mit dem ersten Minimum dem Rayleigh Integral für die Empfangsapertur mit dem Radius  $b = 1,5 \text{ mm}$  an. Anhand dieses Empfängers prägen sich die Extremwerte wieder nicht vollständig aus und sind auch in der Lage etwas weiter vom Sender entfernt. Bei der Empfangsapertur mit dem Radius  $b = 3,0 \text{ mm}$  bildet sich nur ansatzweise das letzte Maximum aus und dieses bildet sich bei einer ungefähr  $7,1 \text{ mm}$  größeren





**Abbildung 4.1.:** Schallwellenausbreitung entlang der  $z$ -Achse eines kreisförmigen Ultraschallwandlers mit einem Radius  $a = 6,4$  mm für die Erregungsfrequenzen  $f = 40$  kHz (a),  $f = 80$  kHz (b) und  $f = 160$  kHz (c). Die Empfänger haben einen Radius von  $b = 1,5$  mm,  $b = 3,0$  mm und  $b = 6,4$  mm. Hinzu wird die analytische Lösung, welche einem Radius  $b = 0$  mm entspricht, dargestellt.

---

Entfernung von dem Sender aus. Das berechnete Schallfeld für eine Empfangsapertur mit einem Radius  $b = 6,4 \text{ mm}$  verläuft über den gesamten Nahfeldbereich nahezu konstant und nähert sich erst in großer Entfernung der Lösung des Rayleigh Integrals an.

Die gezeigten Fälle gelten für einen Sender mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und verschiedenen Frequenzen. Um den Einfluss der Empfangsapertur besser auf das gemittelte Schallfeld abschätzen zu können, wird auch der Radius des Senders verändert (Abbildung B.1, im Anhang B). Dieser wurde doppelt so groß gewählt wie der bisherige. Zum besseren Vergleich der ermittelten Schalldrücke werden die gleichen Helmholtz Zahlen verwendet. Dadurch entsprechen die Ergebnisse mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und der Frequenz  $f = 80 \text{ kHz}$  [Abbildung 4.1 (b)] den Ergebnissen  $a = 12,8 \text{ mm}$  und der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  [Abbildung B.1 (a)] beziehungsweise die Ergebnisse mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und der Frequenz  $f = 160 \text{ kHz}$  [Abbildung 4.1 (c)] den Ergebnissen  $a = 12,8 \text{ mm}$  und der Frequenz  $f = 80 \text{ kHz}$  [Abbildung B.1 (b)]. Hierbei ist anzumerken, dass die z-Achse nicht auf die Wellenlänge skaliert wird, sodass bei der größeren Apertur die Werte etwas mehr gestreckt sind. Jedoch wird sich in diesen Darstellungen auf die konkreten Längen bezogen.

Aus den gezeigten Darstellungen wird ersichtlich, dass bei einem größeren Radius und gleicher Helmholtz Zahl die gemittelten Schalldrücke dem Verlauf des Rayleigh Integrals wesentlich besser entsprechen. Daher ist der charakteristische Verlauf des Schalldrucks mit einer Empfangsapertur von  $b = 1,5 \text{ mm}$  deutlich besser an dem Verlauf des Rayleigh Integrals angenähert. Aber auch mit einem Radius  $b = 3,0 \text{ mm}$  sind die Schalldruckwerte in einer guten Annäherung vorhanden. Lediglich der Verlauf des Schalldrucks für den Empfänger mit dem Radius  $b = 6,4 \text{ mm}$  entspricht weniger den Verlauf des Schalldrucks mit dem Rayleigh Integral.

Aus diesem Grund lässt sich schlussfolgern, dass die Frequenz einen wesentlichen Einfluss auf die Mittelung des Schalldrucks hat. Währenddessen hat die geometrische Ausdehnung des sendenden Ultraschallwandlers keinen direkten Einfluss auf den gemittelten Schalldruck. Jedoch bewirkt die Größe des Senders bei gleicher Helmholtz Zahl, dass sich die Maxima und Minima in größerer Entfernung zum Ultraschallwandler befinden. Durch das Ausbilden der charakteristischen Merkmale in einer größeren Entfernung ist an diesen Positionen der Öffnungswinkel schmaler für den Empfänger. Daher wirkt sich die Richtcharakteristik des Senders weniger stark auf den gemittelten Schalldruck aus. Aber auch die Richtcharakteristik des Empfängers ist von Bedeutung, weil sich diese durch die Reziprozität des Ultraschallwandlers ebenso ausbildet. Die Richtcharakteristik des Empfängers ist hingegen nur von der Frequenz und der eigenen geometrischen Abmessung abhängig.

Darüber hinaus beeinflussen die Interferenzen den gemittelten Schalldruck. Diese Interferenzen können sich konstruktiv oder destruktiv auf den gemittelten Schalldruck des flächenbehafteten Empfängers im Vergleich zu dem Punktempfänger auswirken. Deshalb werden die Extremwerte des Schalldrucks weniger oder nicht mehr ausgebildet. Die vorhandene Interferenz wird in den gezeigten Exemplaren zum einen durch die Fläche des Empfängers und zum anderen durch die Frequenz der Erregung beeinflusst. Der gemittelte Schalldruck weicht hierbei umso stärker von dem idealisiert berechneten Schalldruck mit dem Rayleigh Integral ab, je größer die Helmholtz Zahl ist. Diese Helmholtz Zahl besteht dabei aus dem Radius des Empfängers und der Wellenzahl. Aufgrund dessen muss bei der Simulation darauf geachtet werden, wie die Abmessung des realen Empfängers zu der Wellenzahl ist. Bilden diese beiden Größen eine große Helmholtz Zahl, dann muss die Fläche des Empfängers in dem Modell berücksichtigt werden, damit die simulierten Werte den realen Ultraschallwandlern entsprechen.

---

### 4.3 Messung zur Charakterisierung der Schallfeldausbreitung von Ultraschallwandlern

---

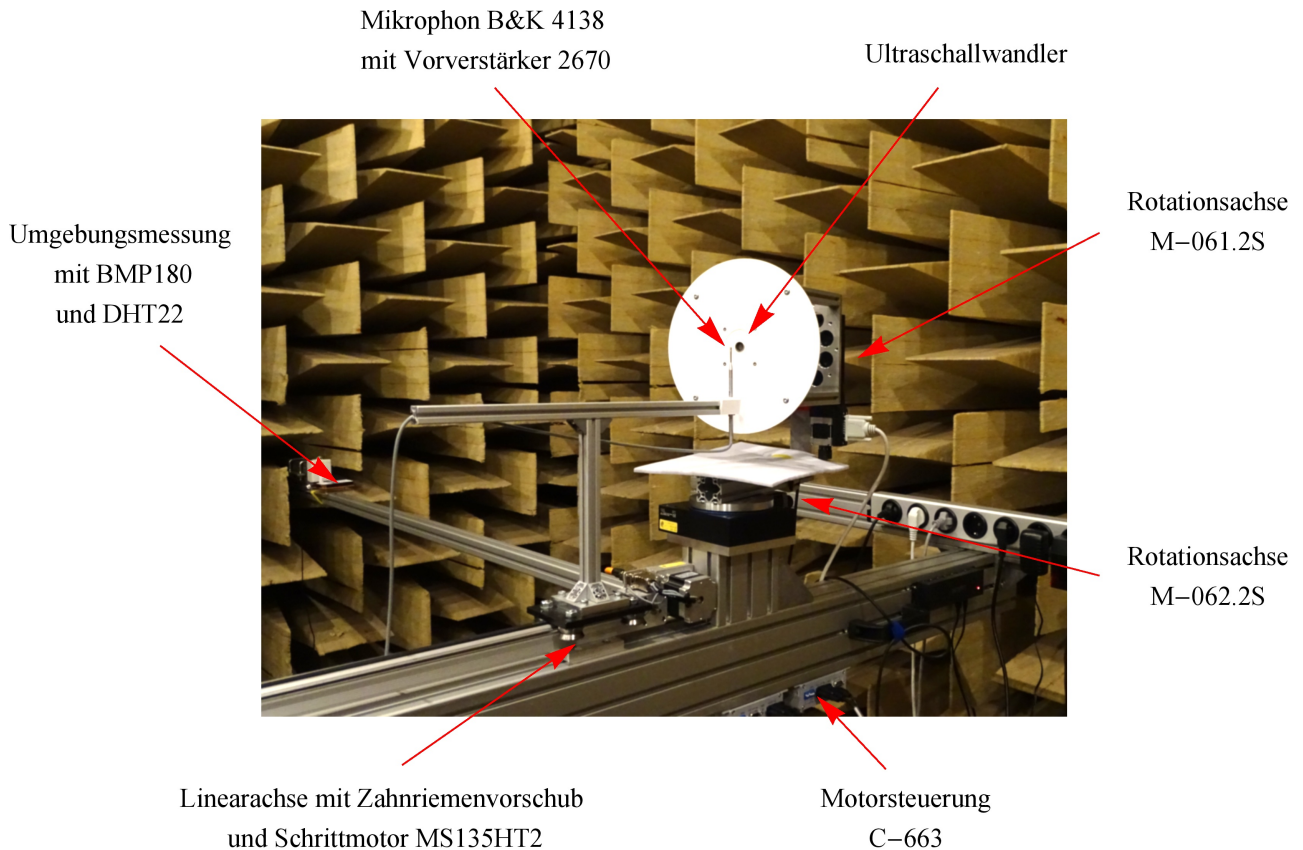
Bisher wurden die Schallfeldberechnungen aus einer theoretischen Sichtweise untersucht. Diese Untersuchungen konnten mit mehreren Modellen und analytischen Lösungen gegeneinander validiert und verifiziert werden. Jedoch soll das erstellte Modell (Kapitel 3.5) auch mit der Realität verglichen und die simulierten Ergebnisse mit den Messwerten validiert werden. Dadurch soll für eine zukünftige Schallfeldcharakterisierung von Ultraschallwandlern eine vorherige Berechnung erfolgen und mit diesen eine

---

Vorhersage wie sich das Schallfeld ausbreitet getroffen werden. Zur Validierung des entwickelten Modells werden die Simulationsergebnisse mit Messungen verglichen. Darüber hinaus ist neben der Messung des Schalldrucks im dreidimensionalen Raum auch die Messung der physikalischen Eigenschaften der umgebenen Luft von Bedeutung, weil sich diese auf die spezifischen Werte der Schallausbreitung auswirken. Dazu wird ein unabhängiges Messsystem zu dem bestehenden Messaufbau verwendet. Im Folgenden wird der Messaufbau erläutert, mit denen sowohl die Charakterisierung der Schallwellenausbreitung von den einzelnen Ultraschallwandlern als auch für den Ultraschall Gruppenwandler (Kapitel 5.4) durchgeführt werden.

Der Messaufbau untergliedert sich in zwei räumlich getrennte Bereiche, wobei die eigentliche Messung des Schalldrucks in einem reflexionsarmen Raum [48] stattfindet. In diesem befinden sich ausschließlich die Messgeräte und Sensoren, die unbedingt zur Messung benötigt werden. Dadurch kann die Beeinflussung auf die Messgröße reduziert werden. Der gesamte Raum, in dem die Messungen durchgeführt wurden, hat eine Fläche von 7,4 m x 5,2 m und ist an den Wänden, der Decke und dem Boden mit Keilen ausgekleidet. Durch diese Struktur werden Reflexionen an den begrenzenden Flächen vermieden und ein nahezu ideales Freifeld gewährleistet. Der allgemeine Aufbau zur Charakterisierung des Schallfeldes (Abbildung 4.2) wurde von Herrn Axel Jäger (TU Darmstadt) konstruiert. Der wesentliche Aufbau befindet sich innerhalb des reflexionsarmen Raums und wird ausschließlich zum Verfahren des Mikrophons und zur Positionierung der zu testenden Schallquelle verwendet. Hierbei wird das kalibrierte Mikrophon vom Typ 4138 (Brüel & Kær, Nærum, Dänemark) mit dem Vorverstärker Typ 2670, welches ebenfalls von der Firma Brüel & Kær (B&K) hergestellt wird, benutzt. Das Mikrophon wird mit einer Spannungsquelle vom Typ 2829 (B&K) betrieben. Die Mikrophoneinheit besitzt in Summe eine Empfindlichkeit von -65,8 dB. Demzufolge wird das akustische Signal in ein elektrisches Signal mit dem Faktor  $0,513 \text{ mV Pa}^{-1}$  umgewandelt [78]. Das Mikrophon wird in radiale Richtung vom Ultraschallwandler bewegt. Dazu ist es über ein Item Profile (Item Industrietechnik GmbH, Solingen, Deutschland) mit der Linearführung (Isel Germany AG, Eichenzell, Deutschland) verbunden. Diese Linearführung besteht aus einem Schrittmotor MS135HT2 und einem Zahnriemenvorschub LEZ1 L1595mm. Zur volumetrischen Messung wurden zwei Rotationsachsen verwendet, sodass ein kugelförmiges Volumen vermessen werden kann. Diese Rotationsachsen bewegen den Ultraschallwandler um einen fixen Punkt, der sich in entsprechender Entfernung zum Mikrophon befindet. Hierbei wird der Ultraschallwandler in einer aus Plexiglas gefertigten Platte mit dem Durchmesser von 250 mm montiert. Diese Plexiglasplatte ist über Item Profile mit der Rotationsachse M-061.2S (Physik Instrumente GmbH & Co.KG, Karlsruhe, Deutschland) verbunden. Durch diese Achse wird der Azimutwinkel des Koordinatensystems gebildet. Die Rotationsachse mit der Plexiglasplatte ist über eine weitere Verbindung mit der zweiten Rotationsachse M-062.2S (Physik Instrumente) zusammengefügt. Diese Achse bewegt den Ultraschallwandler in polare Richtung des Koordinatensystems. Die beiden Achsen werden jeweils mit einem Controller des Typs C-663 (Physik Instrumente) angesteuert. Aufgrund der praktischen Handhabung und dem Ziel des kollisionsfreien Verfahrens nahe der Plexiglasplatte ist der Mittelpunkt des Ultraschallwandlers um 2 cm aus dem Koordinatenursprung nach hinten versetzt. Durch eine Koordinatentransformation wird gewährleistet, dass durch die Ansteuerung der Achsen dieser Versatz korrigiert wird und die zu messenden Koordinaten angefahren werden. Anschließend erfolgt die Rücktransformation, sodass der gemessene Schalldruck für die realen Koordinaten gültig ist.

Neben diesem grundsätzlichen Aufbau wurde ein Messsystem zum Aufzeichnen der physikalischen Eigenschaften der Luft entwickelt. Hierbei werden die Lufttemperatur, der stationäre Druck und die relative Luftfeuchtigkeit gemessen. Dazu werden der Sensor BMP180 (Bosch Sensortec GmbH, Reutlingen, Deutschland) und der Sensor DHT22 (Aosong Electronics Co.,Ltd., Guangzhou, China), beziehungsweise auch als AM2302 bezeichnet, verwendet. Diese Sensoren werden mit einem Arduino Due (Smart Projects S.r.l., Scarmagno, Italien) ausgelesen und die Daten verarbeitet. Anschließend werden diese Daten über eine serielle Schnittstelle an ein Raspberry PI B+ übermittelt, der für die Speicherung der Messergebnisse verwendet wird. Die verwendeten Sensoren haben eine absolute Messungenauigkeit der Raumtemperatur von maximal  $\Delta T = \pm 1^\circ\text{C}$ , der relativen Luftfeuchtigkeit von  $\pm 2\%$  [79] und des stationären Drucks



**Abbildung 4.2.:** Aufbau der wesentlichen Komponenten des Messplatzes zur Schallfeldcharakterisierung der Ultraschallwandler innerhalb des reflexionsarmen Raums (Fachgebiet Mess- und Sensortechnik, TU Darmstadt).

von  $-4 \text{ hPa} \leq \Delta p_0 \leq 6 \text{ hPa}$  [80]. Aufgrund des trägen Verhalten der Luft wurden die Messwerte alle 5 s abgetastet.

Außerhalb des reflexionsarmen Raums befinden sich die Messgeräte, mit denen die Signale des Mikrophons aufgenommen werden. Zur Aufzeichnung des elektrischen Signals wurde das Oszilloskop PXI Messkarte 5922 (National Instruments Corporation, Austin, Texas, USA) verwendet. Mit dem Funktionsgenerator AFG-2225 (Good Will Instrument Co., Ltd., Taipei, Taiwan) wird das Oszilloskop extern getriggert. Die gemessenen elektrischen Signale werden mittels eines Labview Programms (National Instruments), welches von Herrn Matthias Rutsch (TU Darmstadt) programmiert wurde, auf einem Computer gespeichert. Das entwickelte Programm ist hierbei mit einer graphischen Oberfläche hinterlegt und bietet einen großen Funktionsumfang. Hierbei ist neben dem Auslesen auch die Steuerung des Messaufbaus und die Darstellung der aktuellen Schalldrücke implementiert worden. Bei der Steuerung können sowohl die Erregung des Ultraschallwandlers, die Einstellungen der Messgeräte als auch die abzufahrenden Feldpunkte eingestellt werden. Dadurch kann das Messsystem vollautomatisch zur Messung des Schallfeldes verwendet werden, wodurch sich ein Vorteil für große Volumen und einer Vielzahl anzufahrender Punkte in diesem Volumen ergibt. Die Schalldrücke werden zunächst als elektrische Signale hinterlegt und müssen entsprechend des Umrechnungsfaktors von dem Mikrophon berechnet werden. Diese ermittelten Messergebnisse des Schalldrucks bezogen auf den gesamten Messaufbau besitzen eine Messunsicherheit von  $\pm 1 \text{ dB}$  [18]. Im nächsten Abschnitt werden mit diesem Messaufbau die Schallabstrahlung von Ultraschallwandlern für koaxiale Anordnungen charakterisiert.



---

#### 4.4 Schallfeldmessung von coaxial ausgerichteten Ultraschallwandlern

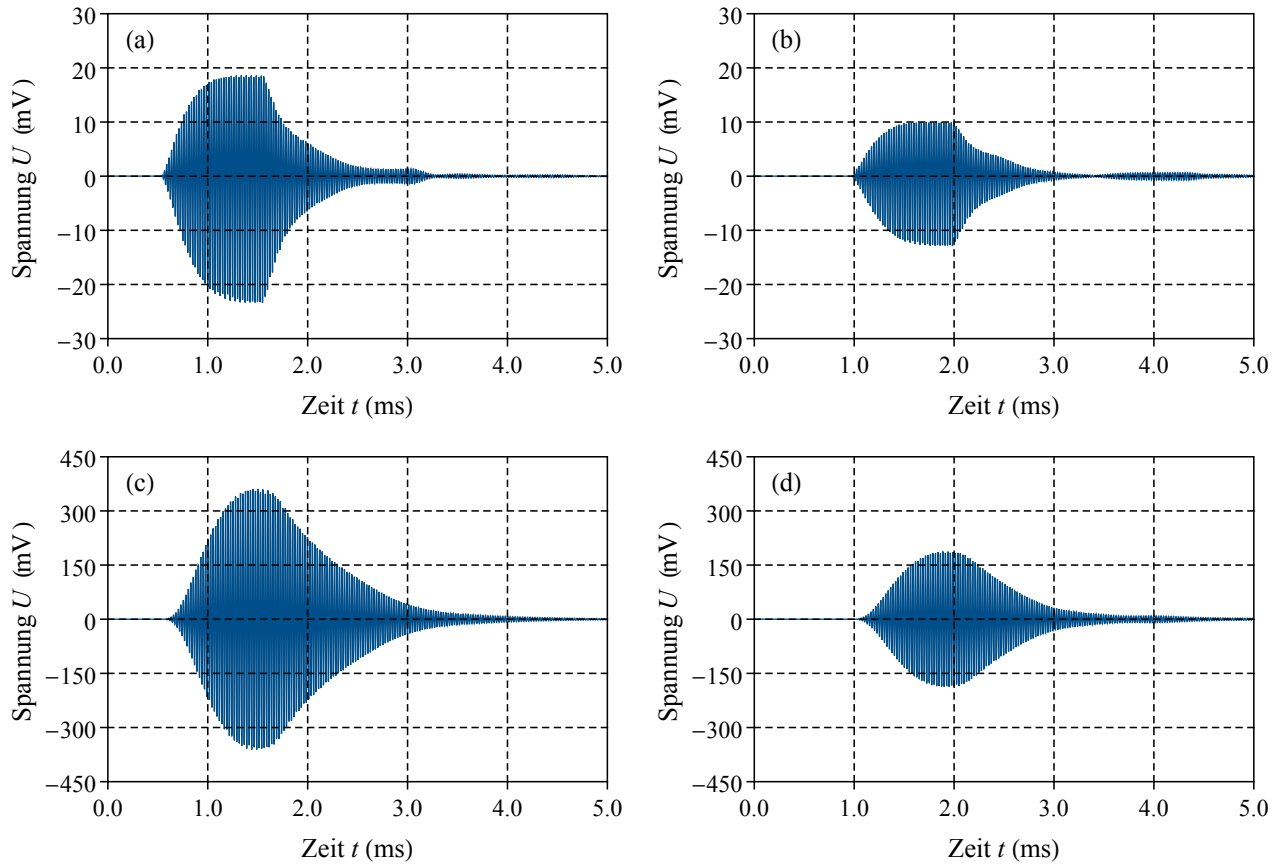
---

Nachdem zunächst die theoretischen Grundlagen zur Schallabstrahlung von coaxialen Ultraschallwandlern erläutert wurden, erfolgt in diesem Abschnitt die Messung von den zwei vorgestellten Ultraschallwandlern (Kapitel 4.1). Im vorherigen Kapitel wurde der Messaufbau zur Schallfeldcharakterisierung der Ultraschallwandler erläutert. Hierbei wird das Mikrophon B&K 4138 als Sensor mit einem Radius  $b = 1,5 \text{ mm}$  verwendet. Zudem wird auch der Einfluss des Radius von dem Empfänger untersucht, weil sich aus der Theorie deutliche Unterschiede bei dem Empfang der Schallsignale ergeben. Um dieses durchführen zu können, bedarf es eines weiteren Sensors, mit dem der Schalldruck gemessen werden kann. Wie in der Theorie beschrieben wurde (Kapitel 3.1), können die meisten Ultraschallwandler aufgrund ihrer Reziprozität sowohl als Sender und Empfänger verwendet werden. Für den zuvor beschriebenen Ultraschallwandler MA40B8S gibt es eine kleine veränderte Variante MA40B8R (Murata), mit dem die Wandlung in umgekehrte Richtung erfolgt. Dadurch wird der Schalldruck in ein elektrisches Signal umgewandelt. Dieser Ultraschallwandler wird zum Empfang des Schalldrucks verwendet, damit der Einfluss der geometrischen Ausdehnung von dem Empfänger untersucht werden kann. Dabei ist anzumerken, dass es sich bei der Messung mit dem MA40B8R um kein kalibriertes Messinstrument handelt, sodass keine quantitativen Messergebnisse aus der Messung des elektrischen Signals für den Schalldruck ermittelt werden können. Dennoch zeigt die Theorie (Kapitel 4.2), dass sich das Schallfeld der verschiedenen Empfangsgrößen in großer Entfernung zum Sender zu einander annähern. Aus diesem Grund werden die Messergebnisse mit dem MA40B8R mit den kalibrierten Messungen des Mikrophons in großer Entfernung gleichgesetzt.

Durch die Verwendung des MA40B8R als zweiten Empfänger ergeben sich vier Möglichkeiten zur Schallfeldmessung von coaxialen Sender und Empfänger Konfigurationen. Für diese vier Varianten wurden neben der Messung des Schalldrucks auch die physikalischen Eigenschaften der umgebenen Luft gemessen (Anhang C.1). Aus den gemessenen physikalischen Eigenschaften geht hervor, dass die Messung für den jeweiligen Fall unter konstanten Bedingungen abgelaufen sind. Die gemessene Temperatur für die vier Messreihen (Abbildung C.1) liegt zwischen  $20,5^\circ\text{C}$  und  $21,5^\circ\text{C}$ . Anhand der Messunsicherheit des Sensors von  $\Delta T = \pm 1^\circ\text{C}$  kann davon ausgegangen werden, dass die zuvor bei Berechnungen verwendete Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  den gemessenen Temperaturen entspricht. Auch der stationäre Druck  $p_0$  (Abbildung C.2) wurde während der Schalldruckmessungen gemessen. Hierbei war dieser auch während der jeweiligen Messung nahezu konstant und schwankte für die vier Messreihen in einem Bereich von 998 hPa bis 1001 hPa. In Anbetracht der Messunsicherheit konnte somit die vorherige Annahme des stationären Drucks  $p_0 = 1001 \text{ hPa}$  bestätigt werden. Als dritte wesentliche Eigenschaft des Mediums wurde die relative Luftfeuchtigkeit gemessen (Abbildung C.3). Diese ist für die Messreihe des Murata, welche mit dem Mikrophon gemessen wurde, etwas niedriger als bei den übrigen Messreihen. Sie beträgt um die 32% relative Feuchtigkeit, während die übrigen Fälle zwischen 36% und 37% relative Feuchtigkeit schwanken. Aufgrund der sehr geringen Luftfeuchtigkeit kann bei allen Messreihen von trockener Luft ausgegangen werden. Durch die Messung der physikalischen Eigenschaften der umgebenden Luft lässt sich schlussfolgern, dass die Messungen des Schalldrucks unter den spezifizierten äußeren Bedingungen stattgefunden haben. Aus diesem Grund können die zuvor angenommenen physikalischen Eigenschaften zur Simulation des Schallfeldes verwendet werden.

Unter den eben beschriebenen äußeren Bedingungen wurden die Messungen für den Schalldruck entlang der z-Achse durchgeführt. Im Gegensatz zu den theoretischen Modellen werden die Ultraschallwandler nicht kontinuierlich mit einem harmonischen Signal angesteuert, sondern mit einem Burst Signal. Dieses Burst Signal hat einen rechteckigen Verlauf mit einer Periodendauer von 0,015 ms. Während einer Periodendauer werden 40 Zyklen mit einer Frequenz von 40 kHz verwendet. Ab ungefähr sechs Zyklen gibt es jedoch keinen praktischen Unterschied mehr zwischen einem harmonischen und einem transienten Signal [2], sodass die verwendeten Signale als harmonisch angenommen werden. Die Spannungsamplitude für den MA40B8S ist  $V_{pp} = 20 \text{ V}$  und wird somit mit der maximal möglichen Amplitude [75] betrieben. Nach Herstellerangaben wird empfohlen, den SensComp600 mit einer Amplitude von  $V_{pp} = 200 \text{ V}$

zu betreiben. Jedoch war keine Spannungsquelle für diese Amplitude vorhanden und daher wird dieser Ultraschallwandler ebenfalls mit der Amplitude  $V_{pp} = 20\text{ V}$  betrieben. Die empfangenden Signale werden mit einer Frequenz von 500 kHz vom Oszilloskop abgetastet. Zur Reduzierung des Messrauschens wurden die gemessenen Werte mit 16-fachen Averaging durchgeführt.

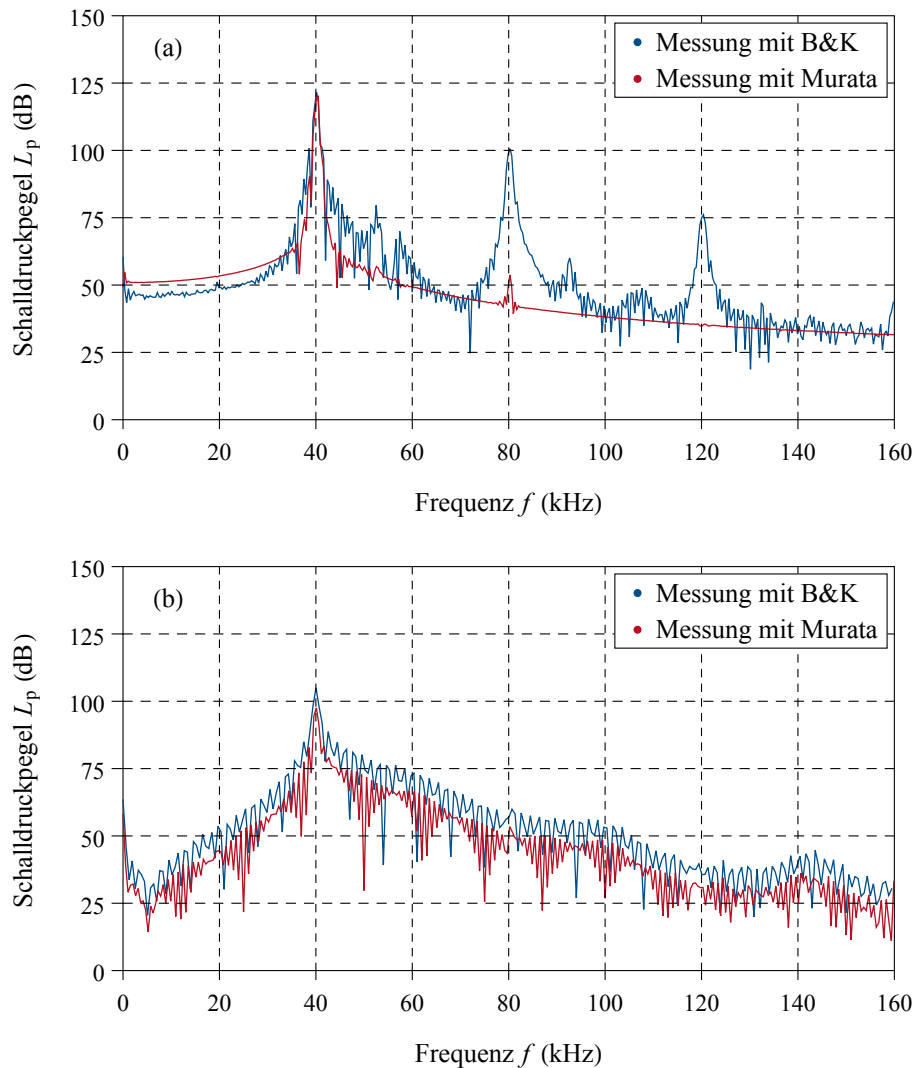


**Abbildung 4.3.:** Zeitlicher Verlauf des ausgesendeten Signals von dem Murata MA40B8S in einem Abstand von  $z_p = 150\text{ mm}$  (a) und (c) und einem Abstand  $z_p = 300\text{ mm}$  (b) und (d). Die gemessene Spannung erfolgte für (a) und (b) mit Mikrofon B&K 4138 und für (c) und (d) mit einem Murata mit dem Radius  $b = 6.4\text{ mm}$ .

Anhand der Signalverläufe für den MA40B8S (Abbildung 4.3) und für den SensComp600 (Abbildung C.4) können die Schalldrücke für die jeweilige Entfernung zwischen dem Sender und dem Empfänger im Feld berechnet werden. Wie bereits erwähnt, wird dazu die Spannung entsprechend des Umrechnungsfaktors von der Mikrophoneinheit in den Schalldruckpegel überführt. Bevor diese Umrechnung erfolgen kann wird jedoch die maximale gemessene Spannung des Signals ermittelt. Hierbei ist eine Besonderheit für das Mikrofon zu beachten, weil das gemessene Signal [Abbildungen 4.3 (a) und (b)] unsymmetrisch ist. Das unsymmetrische Signal zeigt, dass Nichtlinearitäten durch die verwendeten Komponenten und der Wellenausbreitung auftreten. Im Gegensatz dazu ist das gesendete Signal vom selben Ultraschallwandler aber von dem MA40B8R gemessen symmetrisch [Abbildung 4.3 (c) und (d)]. Die gemessenen Zeitsignale von beiden Sensoren ist für den SensComp600 symmetrisch (Abbildung C.4). Aufgrund der auftretenden Unsymmetrie wird das Spektrum des gemessenen zeitlichen Signals ermittelt und untersucht. Dazu werden mithilfe einer Fourier Transformation (FFT) die zeitlichen Signale in den Frequenzbereich überführt (Abbildung 4.4) und analysiert. Die Transformation in den Frequenzbereich erfolgte dabei für die Distanz zwischen dem Sender und Empfänger von 150 mm und für die Entfernung



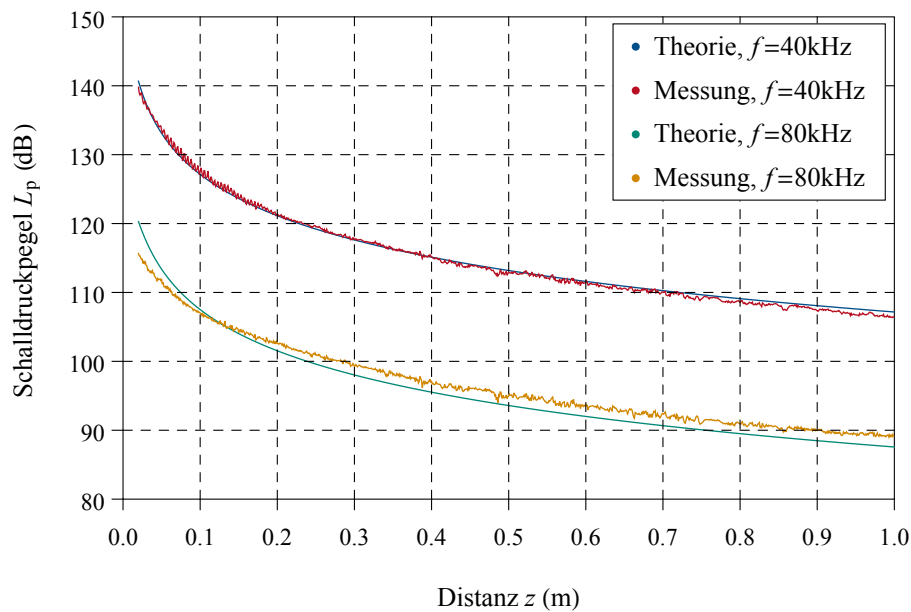
von 300 mm (Abbildung C.5). Hierbei ergibt sich ein ähnliches Spektrum für die coaxialen Sender und Empfänger Konfigurationen, trotz unterschiedlicher Entfernungen zueinander.



**Abbildung 4.4.:** Überführung der Zeitsignale in den Frequenzbereich mit der FFT und anschließender Umrechnung in den Schalldruckpegel. Die Sender und Empfänger sind für diesen Frequenzverlauf 150 mm voneinander entfernt. Als Sender wurde der Murata MA40B8S (a) und der SensComp600 (b) verwendet.

Anhand des Frequenzspektrums ist ersichtlich, dass der SensComp600 [Abbildungen 4.4 (b) und C.5 (b)] ein lineares Verhalten aufweist. Das ist daran zu erkennen, dass sich nur bei einer Frequenz  $f = 40$  kHz eine signifikante Amplitude ausbildet. Das Frequenzspektrum des MA40B8S [Abbildungen 4.4 (a) und C.5 (a)], welches mit dem Mikrophon gemessen wurde, bildet jedoch bei der Frequenz  $f = 40$  kHz und den ersten zwei Oberwellen eine Amplitude aus. Die Art der hier vorhandenen Nichtlinearität wird als lineare Verzerrung oder auch Distortion bezeichnet [3]. Diese auftretende Verzerrung entsteht unter anderem bei der Wandlung der elektrischen Signale zu den mechanischen Größen des MA40B8S [76]. Die verzerrte Vibration der Oberseite des Kolbenstrahlers koppelt dann neben der fundamentalen Frequenz auch Oberwellen in das Medium ein. Dadurch werden in der Messung neben der ersten harmonischen Schwingung auch Vielfache dieser Frequenz gemessen. Im Gegensatz zum Mikrophon werden die Amplituden bei den höheren Frequenzanteilen der Messung mit dem Murata MA40B8R nicht mehr so stark ausgeprägt. Das liegt zum einen daran, dass das Mikrophon wesentlich breitbandiger als der MA40B8R

ist und zum anderen durch die Wandlung der mechanischen Größe in ein elektrisches Signal, bei dem dieses wieder entzerrt wird. Jedoch ist der Anteil der Entzerrung nur bei großen Schalldrücken beziehungsweise bei kleinen Abständen zum sendenden Ultraschallwandler von Bedeutung. Während dessen ist der MA40B8R schmalbandig, sodass die Signale bei der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  umgewandelt werden. Das nichtlineare Verhalten des MA40B8S wird untersucht und eine Abschätzung des Einflusses auf den gesamten Schalldruck vorgenommen. Zur Überprüfung des Verhaltens des Ultraschallwandlers wurden die Schalldrücke für die Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  und  $f = 80 \text{ kHz}$  mit Simulationen analysiert. Diese entsprechen der angeregten Frequenz und der ersten Oberwelle. Der gemessene zeitliche Schalldruck wird für die Punkte entlang der z-Achse mit der FFT in den Frequenzbereich transformiert. Anschließend werden die Amplituden für die jeweilige Frequenz durch den Umrechnungsfaktor des Mikrophons ermittelt. Neben der Auswertung der Messung werden die Schalldrücke mit dem flächenbehafteten Empfänger nach dem Integral (4.3) berechnet. Hierbei werden die Simulationen für die beiden Frequenzen durchgeführt und mit den Messergebnissen verglichen (Abbildung 4.5). Zum Vergleich des Schalldruckpegels werden die theoretischen Berechnungen auf die Amplitude des gemessenen Signals im Frequenzbereich bezogen.



**Abbildung 4.5.:** Simulation und spektrale Frequenzanteile von der Messung für die Frequenzen  $f = 40 \text{ kHz}$  und  $f = 80 \text{ kHz}$ . Das Spektrum wurde mittels einer FFT aus den zeitlichen Signalverläufen der Messungen erstellt.

Die theoretischen Werte liegen in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Werten für  $f = 40 \text{ kHz}$  und weisen für die Frequenz  $f = 80 \text{ kHz}$  eine Differenz auf. Hierbei ist der Unterschied zwischen der Simulation und Messung für  $f = 40 \text{ kHz}$  bei  $\Delta L_p = \pm 1,3 \text{ dB}$  und für  $f = 80 \text{ kHz}$  bei  $\Delta L_p = \pm 3,3 \text{ dB}$ . Neben der Messunsicherheit des Systems haben auch die Modellannahmen für den Ultraschallwandler einen Einfluss auf die Simulation. Die größere Abweichung bei der höheren Frequenz lässt sich auf die Abtastfrequenz und die Vermessung der Öffnung des Ultraschallwandlers zurückführen. Anhand der geringeren Abtastfrequenz im Verhältnis zur zweiten harmonischen Frequenz ist die Abtastung nicht so gut wie bei der ersten harmonischen Erregung und dadurch ergibt sich ein größerer Fehler. Ebenso wirkt sich die gemessene Öffnung auf die Schallausbreitung aus. Wie in der Theorie gezeigt wurde (Kapitel 2.4), hat die Helmholtz Zahl einen entscheidenden Anteil an der Wellenausbreitung. Diese setzt sich gerade aus dem Radius und der Wellenzahl, die von der Frequenz beeinflusst wird, zusammen. Durch die Messungenauigkeit der akustischen Apertur wirkt sich der Fehler auf die zweite harmonische Frequenz

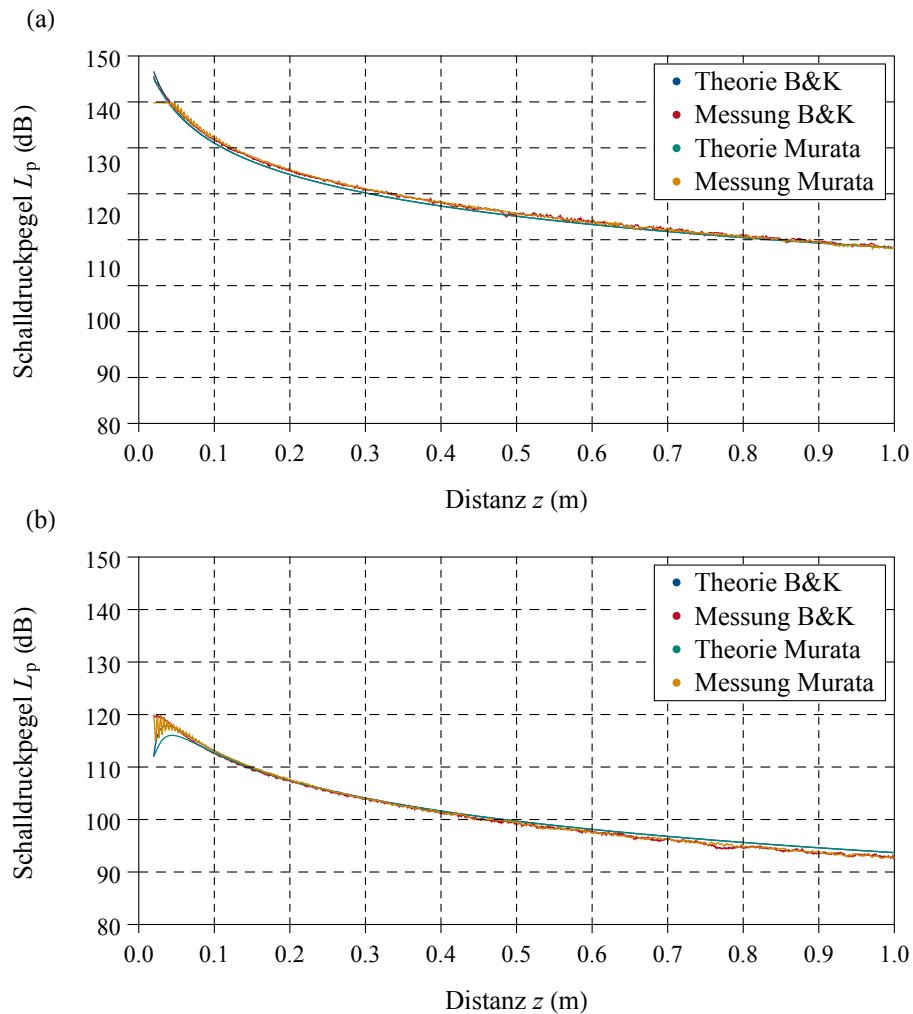
---

doppelt so groß aus. Darüber hinaus hat auch die Annahme der homogen Verteilung der Schallschnelle auf höhere Frequenzen einen größeren Fehler als bei niedrigeren Frequenzen.

In Bezug auf die Messunsicherheit des Systems, welche bei  $\pm 1,0$  dB liegt, kann trotz der Annahmen bei der Modellierung des Ultraschallwandlers von einer sehr guten Übereinstimmung zwischen der Simulation und der Messung ausgegangen werden. Für genauere Vorhersagen der Schallwellenausbreitung müssen weitere Untersuchungen des Ultraschallwandlers bezüglich der geometrischen Abmessung und der Verteilung der Schnelle auf der Oberfläche durchgeführt werden. Jedoch ist der wesentliche Bestandteil dieser Arbeit die Modellierung der Schallwellenausbreitung in dem Medium. Hierbei werden sowohl die Wandlungsprozesse des elektrischen Signals in eine mechanische Größe und in umgekehrte Richtung nicht näher untersucht. Diese Abgrenzung stellt wie bereits im Kapitel 3.1 beschrieben die Limitierung des Modells dar. Dennoch kann aus der Messung geschlussfolgert werden, dass die nichtlineare Schallwellenausbreitung aufgrund der Beschaffenheit und der Ansteuerung des Ultraschallwandlers entstammt. Durch den hohen Schalldruckpegel existieren auch nichtlineare Anteile durch das Medium (Kapitel 2.5.2). Jedoch wird davon ausgegangen, dass der Anteil durch die Wandlung dem der nichtlinearen Ausbreitung im Medium überwiegt [45]. Dieses lässt sich auch mit den räumlichen Verläufen des Schalldruckpegels von der Simulation und der Messung für die jeweilige Frequenz zeigen (Abbildung 4.5). Das Verhältnis der ersten Oberwelle zur harmonischen Erregung beträgt ungefähr 0,1. Dadurch dominiert die harmonische Erregung über die Oberwellen, sodass diese prägend für die Ausbreitung der Schallwelle ist. Aus diesem Grund muss der Schalldruck nur für die erste harmonische Frequenz simuliert werden, unter der Annahme, dass die Oberwellen nur einen geringen Anteil an dem resultierenden Schallfeld besitzen. Jedoch sollte der Einfluss der Oberwellen immer bei der Fehleranalyse berücksichtigt werden.

Abschließend werden die Schalldruckverläufe der Simulationen mit den Messwerten validiert (Abbildung 4.6). Dazu werden für die vier vorgestellten Varianten die Zeitsignale entsprechend der jeweiligen Entfernung zueinander ausgewertet. Anhand dieser Zeitsignale wird der jeweilige Schalldruckpegel berechnet. Für die Messung mit dem Murata MA40B8R werden die gemessenen Schalldruckpegel auf die Messung mit dem Mikrophon in großer Entfernung bezogen. Dadurch kann ein Vergleich zwischen den Messungen und den Simulationen dem MA40B8R durchgeführt werden. Die Messergebnisse für den Ultraschallwandler MA40B8S mit dem Mikrophon sind trotz der linearen Verzerrung in sehr guter Übereinstimmung mit den Simulationen. Hierbei weichen die Messergebnisse von den Simulationen stets um weniger als  $\pm 1,0$  dB ab und sind daher innerhalb der Messunsicherheit des Systems. Ebenso stimmen die Messergebnisse mit dem Murata MA40B8R hervorragend mit der Simulation überein. In unmittelbarer Entfernung zum Sender wirkt sich allerdings die Fläche des empfangenden Ultraschallwandlers und die Wandlung des akustischen Signals auf die Messergebnisse aus. Das liegt an der Reflexion an der Oberfläche des MA40B8R, die dann auf den Sender zurückwirken. Die Reflexionen sind für die Entfernung von ungefähr 6 cm bis 12 cm in den Messergebnissen erkennbar. Dabei tritt ein systematisches Schwanken der Messergebnisse auf. Die Reflexionen verursachen entweder eine Verstärkung oder Abschwächung des Signals. Diese Schwankungen betragen weniger als  $\pm 0,5$  dB wobei die gesamte Abweichung der Messergebnisse zu den Simulationen um weniger als  $\pm 1,0$  dB beträgt, sodass der Einfluss der Reflexion vernachlässigt werden kann. Der jedoch wesentlich größere Anteil für die verfälschten Messergebnisse in kurzer Entfernung ist die Begrenzung der elektrischen Amplitude durch den empfangenden Ultraschallwandler. Aus den zeitlichen Verläufen wird ersichtlich, dass die gemessene elektrische Amplitude sich in der Begrenzung des Systems befindet (Abbildung C.6). Aus diesem Grund sind die gemessenen Spannungen und somit auch die Schalldruckpegel bis zu einer Distanz von 58 mm ungültig. Ab dieser Entfernung zwischen dem Sender und Empfänger weichen die Messergebnisse dann um weniger als  $\pm 1,0$  dB von der Simulation ab. Bei der Messung und Simulation des SensComp600 ist die Abweichung in beiden Fällen nicht größer als  $\pm 1,0$  dB. Jedoch unterscheiden sich auch in diesen Fällen die Messungen in unmittelbarer Nähe des Senders, welche bei dem SensComp600 bis 50 mm verläuft, deutlich von den Simulationen. Hierbei werden die elektrischen Signale aufgrund des kleineren Schalldruckpegels nicht begrenzt. In diesem Fall beeinflussen die Reflexionen die Messergebnisse bei kleinen Entfernungen zwischen dem Sender und Empfänger. Insbesondere durch die Reflexion von der Ober-

fläche des empfangenden Muratas ist eine Rückwirkung auf den SensComp600 in den Messergebnissen zu erkennen. Hierbei bilden sich stehende Wellen zwischen den beiden Ultraschallwandlern aus, die die Schwankungen der Messergebnisse in unmittelbarer Umgebung verursachen.



**Abbildung 4.6.:** Validierung des Modells für koaxiale Sender und Empfänger Konfigurationen. Die Simulation und die Messung für den Ultraschallwandler Murata MA40B8S (a) und für den SensComp600 (b).

Neben der Validierung des zuvor vorgestellten Modells können wesentliche Eigenschaften der verwendeten Ultraschallwandler ermittelt werden. Aus den Messergebnissen für den MA40B8S konnte gezeigt werden, dass er ein nichtlineares Verhalten mit der betriebenen Spannung aufweist. Dieses entsteht bei der Wandlung des elektrischen Signals in eine mechanische Größe [76]. Die ausgeprägte Nichtlinearität ist eine lineare Verzerrung, sodass neben der ersten harmonischen Schwingung weitere Oberwellen existieren. Jedoch wird bei den Messungen auch festgestellt, dass die Oberwellen auf das gesamte Schallfeld kaum einen Einfluss haben. Hierbei sind die simulierten Ergebnisse ohne die Berücksichtigung der Oberwellen innerhalb der Messunsicherheit des Aufbaus mit  $\pm 1,0$  dB. Aufgrund des geringen Anteils der Oberwellen an dem gesamten Schalldruckpegel, kann weiterhin die Simulation mit den linearen Grundgleichungen erfolgen. Darüber hinaus wurden bei der Durchführung der Messung Rückwirkungen des Empfängers auf den Sender durch Reflexionen detektiert. Diese Reflexionen verursachen je nach Entfernung zwischen dem Sender und Empfänger eine Verstärkung oder Abschwächung der elektrischen Signale beziehungsweise der Schalldruckpegel. Jedoch haben diese in den Messungen eine geringe

Wirkung gezeigt, sodass auch die Reflexionen im Weiteren nicht bei der Modellierung berücksichtigt werden.

---

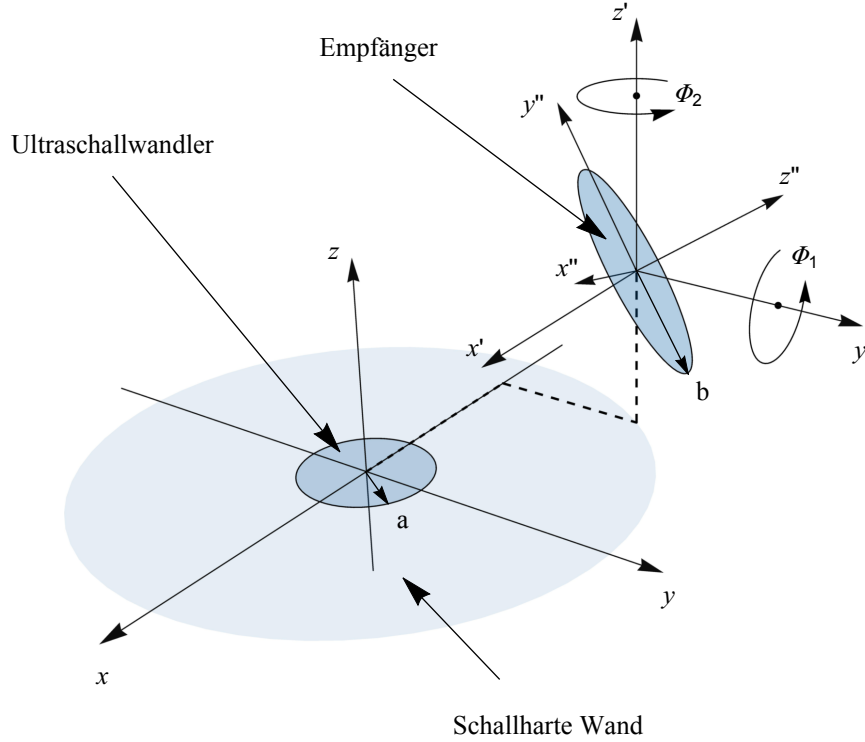
#### 4.5 Modellbildung und Implementierung für eine allgemeine Anordnung

---

In dem Kapitel 4.2 wurde ein Modell zur Berechnung des Schalldrucks für koaxiale Sender und Empfänger Konfigurationen vorgestellt. Hierbei wurde das ursprüngliche Rayleigh Integral nach der Gleichung (2.40) erweitert, sodass die Empfangsapertur über die Mittelung des Schalldrucks berücksichtigt wird. Anhand dieser Mittelung über die Oberfläche wird die Berechnung des Schalldrucks aufwendiger, weil anstatt des Flächenintegrals ein vierfach Integral gelöst werden muss. Für den koaxialen Fall für kreisförmige Sender und Empfänger Konfigurationen konnte die Integrationsordnung analytisch reduziert werden [14]. Der Schalldruck kann dann über ein einfaches Integral numerisch berechnet werden. In diesem Abschnitt wird der benutzte Ansatz nach der Gleichung (4.1) für eine beliebige Anordnung von einem Sender und Empfänger verwendet. Dabei soll sowohl die Lage als auch die Orientierung zueinander frei wählbar sein. Zunächst wird das Modell für den Fall eines Kolbenstrahlers in einer unendlich ausgedehnten Platte, welches dem Rayleigh Integral entspricht, entwickelt. Hierbei werden die Flächen der Sender und Empfänger in parametrischer Form hergeleitet und daraus das vierfach Integral entwickelt. Anschließend wird daraus ein diskretes Modell entwickelt, mit dem die parallele Berechnung über die GPU möglich ist. Zum Schluss wird das Modell für die Positionierung des sendenden Ultraschallwandlers in einer finiten Abmessung der schallharten Wand vorgestellt.

Die Berechnung des gemittelten Schalldrucks erfolgt zunächst über das Rayleigh Integral. Hierbei müssen zunächst die sendende und empfangende Apertur parametrisiert werden, damit eine anschließende numerische Integration durchgeführt werden kann. Die Entwicklung der geometrischen Anordnung der Sender und Empfänger Konfigurationen wird für kreisförmige Ultraschallwandler hergeleitet. Das stellt zunächst eine Einschränkung der Geometrie der Ultraschallwandler dar. Jedoch wird das methodische Vorgehen erläutert und dadurch kann es bei geeigneter Parametrierung der Flächen jederzeit erweitert werden. Die grundsätzliche Anordnung (Abbildung 4.7) ist in der Form gewählt worden, dass der Koordinatenursprung sich im Mittelpunkt des sendenden Ultraschallwandler befindet. Die ebene Fläche des Ultraschallwandlers mit dem Radius  $a$  bildet die  $xy$ -Ebene des ursprünglichen Koordinatensystems. Die  $z$ -Achse des Koordinatensystems zeigt in den oberen Halbraum. Um diesen Ultraschallwandler befindet sich zunächst eine unendlich ausgedehnte schallharte Wand. Der empfangende Ultraschallwandler befindet sich um einen beliebig verschobenen Feldpunkt  $\vec{r}_t$  entfernt [15]. Hierbei ist der Referenzpunkt auf der kreisförmigen Fläche mit dem Radius  $b$  ebenfalls der Mittelpunkt. Das ursprüngliche Koordinatensystem wird mit diesem Ultraschallwandler an diese Position verschoben und bildet dort ein neues Koordinatensystem mit  $(x', y', z')$ . Anschließend erfolgt mithilfe von zwei Rotationen die Orientierung des Empfängers. Anhand der ersten Drehung mit dem Winkel  $\Phi_1$  um die  $y'$ -Achse erfolgt die Kippung des Ultraschallwandlers [15]. Darauf folgend wird der Empfänger um die  $z'$ -Achse um den Winkel  $\Phi_2$  gedreht. Durch diese zwei Drehungen kann der Empfänger im Feldpunkt  $(x_t, y_t, t_t)$  ausgerichtet werden. Aufgrund der Verschiebung und den Drehungen besitzt die Sender und Empfänger Konfiguration fünf Freiheitsgrade. Für beliebige Körper sind jedoch sechs Freiheitsgrade notwendig. Demzufolge muss noch eine Drehung um die eigene Achse erfolgen. Diese ist jedoch bei kreisförmigen Körpern durch die Rotationssymmetrie nicht notwendig. Ferner ist es auch möglich bei der Parametrierung die Drehung von beliebigen Körpern schon mit einzubeziehen. Hierbei ist jedoch die Drehung der Fläche um sich selbst statisch und es geht ein Vorteil zur Beschreibung verloren. Anhand der Beschreibung der Drehungen kann die Orientierung des Empfängers für einen beliebigen Raumpunkt automatisch erfolgen. Dieses ist möglich, da die Drehwinkel durch den Raumpunkt bestimmt und parametrisiert werden können. Wird jedoch vorher die Drehung um die eigene Achse nicht berücksichtigt, ist für diesen Fall eine automatische Drehung im Raum nicht möglich. Deshalb ist es ein Nachteil, wenn große Volumen simuliert werden und eine Drehung um die eigene Achse benötigt wird. Dennoch ist diese Drehung ungewöhnlich und nicht von Notwendigkeit, weil die meisten Empfänger zum Charakterisieren des Schallfeldes kreisförmig

mig sind oder die Sender und Empfänger für andere Anwendungsfälle statisch zueinander angeordnet sind. Aus diesem Grund wird die Herleitung der Empfangsapertur nur mit den zwei Drehungen und der Verschiebung im Raum durchgeführt.



**Abbildung 4.7.:** Modell zur Schallfeldsimulation von beliebigen Sender und Empfänger Konfigurationen [15]. Der Sender befindet sich in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand und der Mittelpunkt befindet sich im Koordinatenursprung. Der Empfängermittelpunkt ist um einen beliebigen Punkt verschoben und befindet sich im Koordinatenursprung des neuen Systems  $(x', y', z')$ . Die Orientierung erfolgt über die Drehungen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

Zur Berechnung des gemittelten Schalldrucks über das Rayleigh Integral muss die Fläche des Senders und Empfängers noch mathematisch beschrieben werden. Hierzu werden diese als Vektoren dargestellt und anschließend ihre Euklidische Distanz ermittelt. Während die Beschreibung der sendenden Fläche, wie in Kapitel 2.4 beschrieben wurde, bestehen bleiben kann, muss die Fläche des Empfängers transformiert werden. Dazu wird der zuvor geschilderte Zusammenhang durch

$$\vec{r}_p = \vec{r}_t + D_{\Phi_2} \cdot \left( D_{\Phi_1} \cdot \begin{pmatrix} r_b \cos(\varphi_b) \\ r_b \sin(\varphi_b) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (4.4)$$

ausgedrückt. Hierbei wird die Kreisfläche des Empfängers durch  $(r_b \cos(\varphi_b), r_b \sin(\varphi_b), 0)^T$  dargestellt. Die erste Drehung um den Winkel  $\Phi_1$  wird durch die Drehmatrix  $D_{\Phi_1}$ , die die Form

$$D_{\Phi_1} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_1) & 0 & \sin(\Phi_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Phi_1) & 0 & \cos(\Phi_1) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$



hat, umgesetzt. Der resultierende Vektor wird dann mithilfe der zweiten Drehmatrix  $D_{\Phi_2}$  um den Winkel  $\Phi_2$  gedreht. Diese Matrix hat die Form

$$D_{\Phi_2} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_2) & -\sin(\Phi_2) & 0 \\ \sin(\Phi_2) & \cos(\Phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Abschließend wird die orientierte Fläche um den Raumpunkt  $\vec{r}_t$  verschoben. Die beliebig orientierte und verschobene kreisförmige Fläche wird durch den Vektor

$$\vec{r}_p = \begin{pmatrix} x_t + \cos(\Phi_1) \cos(\Phi_2) r_b \cos(\varphi_b) - \sin(\Phi_2) r_b \sin(\varphi_b) \\ y_t + \cos(\Phi_1) \sin(\Phi_2) r_b \cos(\varphi_b) + \cos(\Phi_2) r_b \sin(\varphi_b) \\ z_t - \sin(\Phi_1) r_b \cos(\varphi_b) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

dargestellt. Die sendende Fläche wird über  $(r_a \cos(\varphi_a), r_a \sin(\varphi_a), 0)^T$  beschrieben. Durch die anschließende Berechnung der Euklidischen Distanz  $R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)$  kann das Integral

$$\frac{\bar{p}(\vec{r}_p)}{p_{\text{ober}}} = \frac{jk}{4\pi^2 b^2} \int_{r_b=0}^b \int_{\varphi_b=0}^{2\pi} \int_{r_a=0}^a \int_{\varphi_a=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR(\vec{r}_p, \vec{r}_q)}}{R(\vec{r}_p, \vec{r}_q)} r_a r_b d\varphi_a dr_a d\varphi_b dr_b \quad (4.8)$$

für den gemittelten Druck numerisch berechnet werden [15].

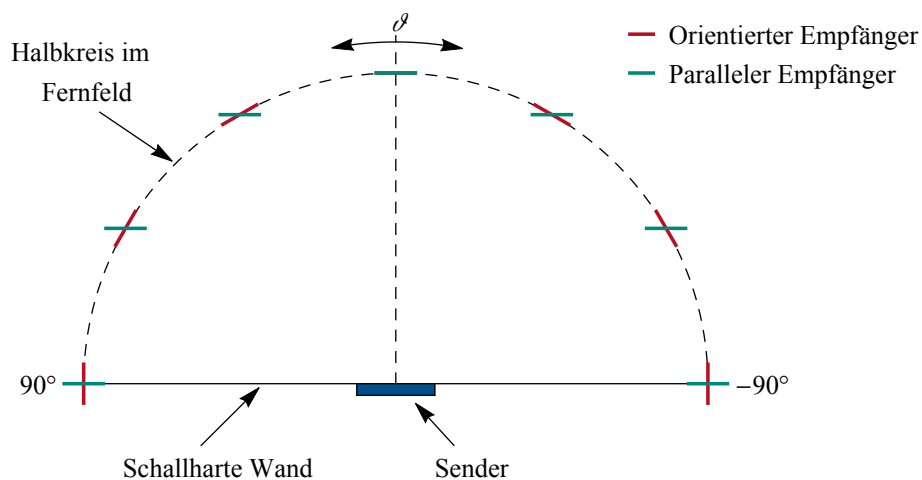
In Kapitel 3.3 wurde gezeigt, dass der Schalldruck mithilfe der numerischen Integrationstechniken in Mathematica sehr genau berechnet werden kann. Aus diesem Grund wird diese für die theoretische Untersuchung des Einflusses der Empfängerfläche für das Fernfeld verwendet (Kapitel 4.6). Hierzu muss jedoch der Programmcode an die neue Problemstellung angepasst werden. Das numerische Integral wird um zwei Ordnungen erweitert, sodass zusätzlich über den Radius  $r_b$  und den Winkel  $\varphi_b$  integriert wird. Darüber hinaus wird die Euklidische Distanz an den flächenbehafteten Empfänger angepasst. Zur numerischen Integration wird die Technik nach Gauß-Kronrod verwendet, da diese neben den exakten Ergebnissen in Bezug auf die analytischen Lösungen die kürzeste Rechenzeit aufgewiesen hat.

Für die Berechnung mit dem KHI, wodurch der Ultraschallwandler in einer umgebenen schallharten Wand mit vorgegebener Größe berücksichtigt wird, erfolgt die Simulation wie in der Gleichung (3.22) beschrieben. Es wird die Berechnung des Schalldrucks, anstatt für einen einzelnen Feldpunkt, mit einem flächenbehafteten Empfänger und somit eigentlich mit mehreren Feldpunkten durchgeführt. Hierzu wird ebenfalls die Fläche des Empfängers mithilfe des DistMesh-Algorithmus diskretisiert. Diese triangulierte Fläche wird entsprechend der vorgegebenen Winkel gedreht und in einen beliebigen Raumpunkt verschoben. Anschließend wird das Feld über diese Fläche mithilfe der Gaußschen Quadratur und anhand von sieben GP integriert. Für dieses Modell werden die Schallfelder für den Murata MA40B8S und den SensComp600 simuliert und diese Ergebnisse mit den Messungen validiert (Kapitel 4.7).

## 4.6 Vergleich zwischen punktförmigen und flächenbehafteten Empfängern im Fernfeld

Bisher konnte gezeigt werden, dass der Empfänger einen wesentlichen Einfluss auf die simulierten und gemessenen Schalldrücke entlang der z-Achse aufweist. Bei coaxialen Anordnungen konnte gezeigt werden, dass die Aperturgröße einen Einfluss auf den gemittelten Schalldruck hat. Hierbei wird der Schalldruck in einer kurzen Distanz umso schlechter an den Schalldruck eines einzelnen Feldpunkt entsprechend des Rayleigh Intervals angenähert je größer die Empfangsfläche ist. Dieses resultiert aus der Mittelung über die Fläche des Empfängers, bei der sich, im Gegensatz zu dem realen Schalldruck in einem einzelnen Feldpunkt, die Interferenzen auf dessen Oberfläche negativ auf den simulierten und gemessenen Schalldruck auswirken.

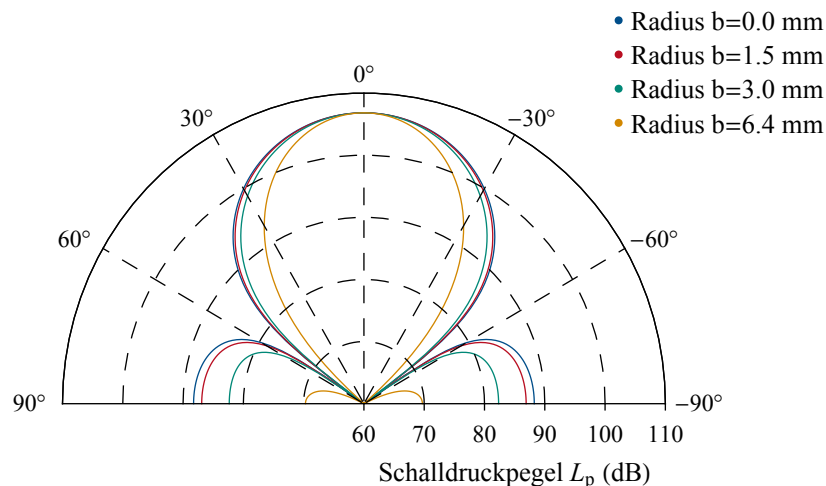
In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Empfangsapertur im Fernfeld untersucht. Dazu wird eine theoretische Betrachtung durchgeführt, mit der die Erkenntnisse über den Einfluss der Empfangsapertur für diese Fälle gewonnen werden sollen. Der Empfänger wird zu diesem Zweck in einem Halbkreis in 1 m Entfernung um den sendenden Ultraschallwandler (Abbildung 4.8) positioniert. Mit der Herleitung zur Beschreibung des Empfängers gibt es für diese Positionen unendlich viele Möglichkeiten den Sender und Empfänger zueinander auszurichten. Um den Einfluss der Empfangsapertur zu untersuchen, wurden zwei Orientierungen für die jeweilige Lage des Empfängers ausgewählt. Dabei ist in dem ersten Fall die Fläche des Empfängers immer parallel zur Oberfläche des Senders orientiert. Für diese Anordnung ist eine Drehung des Empfängers nicht erforderlich, da die Fläche stets parallel zum Sender verläuft. Im dem zweiten Fall wird der Empfänger mit der Lage zum Sender ausgerichtet, sodass die Normalenrichtung der Oberfläche immer in die Richtung des Senders zeigt. Dadurch ist der Empfänger immer dem Sender zugewandt [15]. Die Abhängigkeit der Drehwinkel zur aktuellen Position des Empfängers zum Sender ist in dem erstellten Programmcode in Mathematica berücksichtigt.



**Abbildung 4.8.:** Anordnung der Sender und Empfänger Konfiguration im Fernfeld. Die Empfänger sind parallel (grüne Linie) und zu dem Sender zugewandt (rote Linie) angeordnet. Die Empfänger werden entlang eines Halbkreises im Abstand von 1 m positioniert und entsprechend der Lage orientiert [15].

Für eine exemplarische Untersuchung wird für den Sender ein Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  ausgewählt. Dieser wird wie in vorherigen Fällen mit einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  erregt. Die Empfangsaperturen haben die selbe Größe wie bei der coaxialen Anordnung (Kapitel 4.2). Dadurch ist es möglich, die bisherigen Erkenntnisse mit in die Schlussfolgerungen der Anordnungen im Fernfeld einzubeziehen. Zum Vergleich, wie sich die Größe der Empfangsapertur auf das gemittelte Schallfeld auswirkt, wird die analytische Lösung für die Berechnung des Schalldrucks im Fernfeld verwendet. Dazu hat dieser Empfänger keine räumliche Ausdehnung und wird daher mit dem Radius  $b = 0 \text{ mm}$  angegeben. Die Materialkonstanten sind wie in allen vorherigen Simulationen gewählt worden, sodass die Dichte  $\rho_0 = 1,20 \text{ kg m}^{-3}$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0 = 343,2 \text{ m s}^{-1}$  beträgt.

Die Größe der Empfangsapertur beeinflusst bei einer parallelen Ausrichtung des Empfängers zum Sender den gemittelten Schalldruck (Abbildung 4.9). Hierbei ist der Schalldruck hauptsächlich in den Nebenkeulen niedriger als bei dem Punktempfänger. Die Ausprägung des reduzierten Schalldrucks wird mit zunehmendem Radius des Empfängers deutlich. Die Ursache für die Reduzierung ist die Richtcharakteristik des Empfängers. Diese ist durch die Reziprozität des Empfänger genauso ausgeprägt wie beim Sender der entsprechenden Größe. Durch das kugelförmige Abstrahlen beziehungsweise Empfangen mit kleinen Aperturgrößen in Bezug auf die Wellenlänge (Abbildung 2.5) ist das gemittelte Schallfeld weniger abgeschwächt als bei größeren Empfangsaperturen. Daher kann das Schallfeld in einem Feldpunkt



**Abbildung 4.9.:** Simulierte Empfangscharakteristik für einen Ultraschallwandler mit einem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und einer erregenden Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$ . Die Apertur des Empfängers mit dem Radius  $b$  ist parallel zur unendlich ausgedehnten Ebene und dem sich darin befindenden Sender ausgerichtet und wird auf einem Halbkreis in 1 m um den Sender bewegt. Der Radius  $b = 0 \text{ mm}$  entspricht der analytischen Lösung für das Fernfeld gemäß der Gleichung (2.45).

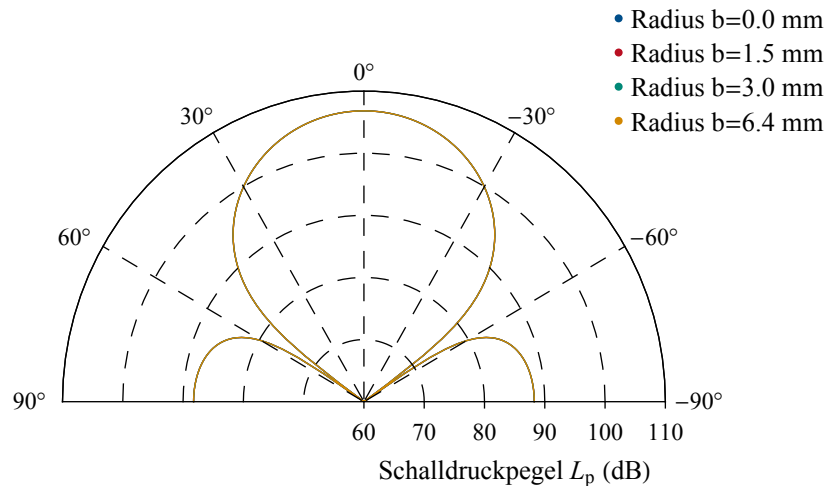
mit einer kleinen Empfangsapertur besser angenähert werden, weil mit dieser das Schallfeld gleichmäßig empfangen wird. Für kleine Öffnungswinkel hingegen haben die dargestellten Radien des Empfängers durch die relativ breite Hauptkeule bei  $b = 6,4 \text{ mm}$  und die kugelförmigen Abstrahlcharakteristiken der beiden anderen Radien keine signifikante Auswirkung im Vergleich zur analytischen Lösung. Dadurch entspricht für diesen Öffnungswinkel der analytisch ermittelte Schalldruck dem gemittelten Schalldruck auf der Oberfläche.

Besonders deutlich wird der Einfluss der Richtcharakteristiken, wenn der Vergleich zur zugewandten Orientierung des Empfängers zu dem Sender (Abbildung 4.10) gezogen wird. Hierbei entsprechen alle Aperturgrößen des Empfängers nahezu der Lösung des Empfängers in einem einzelnen Punkt. Die Unterschiede zwischen den verwendeten Radien des Empfängers auf den gemittelten Schalldruck im Fernfeld sind gering. Sie unterscheiden sich im Vergleich zu der analytischen Lösung im Wesentlichen in den Nulldurchgängen. Die maximale Differenz beträgt bei  $\vartheta = \pm 55^\circ$  ungefähr 1 dB, was jedoch bezogen auf den real vorliegenden Schalldruck einen kleinen Unterschied ausmacht. Für die übrigen Öffnungswinkel unterscheiden sich die Schalldrücke um weniger als 0,1%.

Die Ursache für die geringeren Unterschiede im Vergleich zu dem ersten Fall ist die Orientierung des Empfängers und somit dessen Richtcharakteristik. Während sich im ersten Fall der Öffnungswinkel auch für den Empfänger ändert, variiert bei dem zugewandten Fall der Öffnungswinkel nur um wenige Grad. Darüber hinaus ist dieser Öffnungswinkel sehr schmal durch die große Entfernung zwischen dem Sender und Empfänger. Durch die breite Hauptkeule der Empfangscharakteristik des Empfängers mit dem Radius  $b = 6,4 \text{ mm}$  und den kugelförmigen Empfängern der anderen beiden Fälle weicht der gemittelte Schalldruck weniger ab. Aus diesem Grund existiert der Unterschied ausschließlich durch die Mittelung über die Oberfläche des Empfängers. Dennoch existieren Differenzen in dem gemittelten Schalldruck. Jedoch ist dieser klein wegen der großen Entfernung zum Sender und dem daraus resultierenden kleinen Raumwinkel.

Bei der Reduzierung des Abstandes zwischen dem Sender und Empfänger verkleinert sich auch der Raumwinkel für die selben Empfangsaperturen. Dadurch weicht der gemittelte Schalldruck mehr von der analytischen Lösung und somit vom Schalldruck in diesen Feldpunkt ab. Hierbei zeigt sich auch,

dass der gemittelte Schalldruck durch die Größe des Empfängers beeinflusst wird. Jedoch wirkt sich dieser aufgrund der Richtcharakteristik nicht stark aus. Dennoch weisen alle flächenbehafteten Empfänger einen größeren Unterschied in kürzerer Distanz auf. Insbesondere beim Nulldurchgang für einen Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 55^\circ$  wird dieses sichtbar. Der Unterschied beträgt für diesen Punkt ungefähr 14,5 dB.



**Abbildung 4.10.:** Simulierte Empfangscharakteristik für einen Ultraschallwandler mit einem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  und einer erregenden Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$ . Die Apertur des Empfängers mit dem Radius  $b$  ist zum Sender ausgerichtet und wird auf einem Halbkreis in 1 m um den Sender bewegt. Der Radius  $b = 0 \text{ mm}$  entspricht der analytischen Lösung für das Fernfeld gemäß der Gleichung (2.45).

Daher lässt sich schlussfolgern, dass der Empfänger grundsätzlich einen Einfluss auf den Schalldruck hat. Je nach Aperturgröße, Lage und Orientierung des Empfängers weichen die gemittelten Schalldrücke von dem Schalldruck in einem einzelnen Punkt ab. Bei der coaxialen Anordnung wurde gezeigt, dass der maximale Schalldruck im Nahfeld bei großen Aperturen nicht mehr erreicht wird. Auch die weiteren charakteristischen Merkmale bilden sich nicht mehr komplett aus. Dieses tritt insbesondere bei großen Helmholtz Zahlen bezogen auf die Aperturgröße des Empfängers auf. Im Fernfeld wirkt sich die Orientierung und die Größe der Empfangsapertur auf den gemittelten Schalldruck aus. Der gemittelte Schalldruck entspricht hierbei nur dem Schalldruck für einen einzelnen Punkt, wenn der Empfänger dem Sender zugewandt ist und sich in einer großen Entfernung zu dem Sender befindet. Dieses stellt jedoch einen Spezialfall dar und entspricht nicht dem allgemeingültigen Verhalten des über die Oberfläche gemittelten Schalldrucks und somit nicht der Realität des Messplatzes beziehungsweise des Mikrophons. Aus diesem Grund wird für den Vergleich mit den Messungen ein gemittelter Schalldruck über die Empfängerfläche berücksichtigt, damit die simulierten Ergebnisse möglichst mit den Messergebnissen übereinstimmen.

## 4.7 Schallfeldmessung und Validierung des Modells

Mit den Erkenntnissen des Einflusses durch den gemittelten Schalldruck über die Empfangsapertur wurde das Schallfeld für den Murata MA40B8S und den SensComp600 simuliert und deren Schallfelder messtechnisch charakterisiert. Dazu wurde das Modell möglichst genau an den Messaufbau angepasst und beinhaltet die wesentlichen geometrischen Abmessungen. Hierbei wurde das Modell mit der finiten Abmessung der umgebenden schallharten Wand zur Simulation verwendet und die Mittelung über den Empfänger vorgenommen. Das untersuchte Schallfeld liegt in der xz-Ebene und erstreckt sich in einem

Bereich von  $-0.5 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m}$  und  $0 \text{ m} \leq z \leq 1 \text{ m}$ . Die Schrittweite ist in beide Richtungen identisch und beträgt  $\Delta x = \Delta z = 5 \text{ mm}$

Die kreisförmige schallharte Wand hat dabei einen Radius  $a_{\text{wand}} = 125 \text{ mm}$  und in dem Mittelpunkt sind jeweils die beiden Ultraschallwandler positioniert. Hierbei wurden die Geometrien der Wandler vermessen (Kapitel 4.1) und deren Ausdehnung zur Simulation verwendet. Die Diskretisierung der Oberfläche des Wandlers und der umgebenen Wand wurde mit dem DistMesh-Algorithmus durchgeführt. Für den MA40B8S wurden 147290 Elemente verwendet, wobei die durchschnittliche Qualität der Dreiecke  $\bar{q}_{\text{drei}} = 0,9989$  beträgt. Dadurch ist gewährleistet, dass die Geometrie hervorragend mit diesem Gitter approximiert ist. Der SensComp600 und die umgebende Platte wurden mit 147520 Elementen diskretisiert, wobei in diesem Fall die durchschnittliche Qualität der Elemente  $\bar{q}_{\text{drei}} = 0,9987$  ist. Auch dieses Gitter ist somit von einer hervorragenden Qualität und eignet sich daher sehr gut, die vorhandene Geometrie zu approximieren.

Zur Messung des Schallfeldes wurde das Mikrophon 4138 von B&K verwendet. Dieses hat einen Radius  $b = 1,5 \text{ mm}$  und es wurde ebenfalls mit dem DistMesh-Algorithmus diskretisiert. Im Gegensatz zu dem Sender ist das Mikrophon jedoch frei im Raum positioniert. Dadurch kann die vorgestellte Diskretisierung (Kapitel 3.4.2) verwendet werden. Hierbei wird die Fläche des Mikrophons mit 100 Dreiecken gebildet. In dem Messaufbau ist das Mikrophon senkrecht zu dem Sender angeordnet. Aus diesem Grund wird auch die Empfangsapertur in dem Programmcode durch die Drehungen  $\Phi_1 = 90^\circ$  und  $\Phi_2 = 0^\circ$  ausgerichtet. Die Translation des Mikrophons erfolgt dann entsprechend der ausgewählten Ebene.

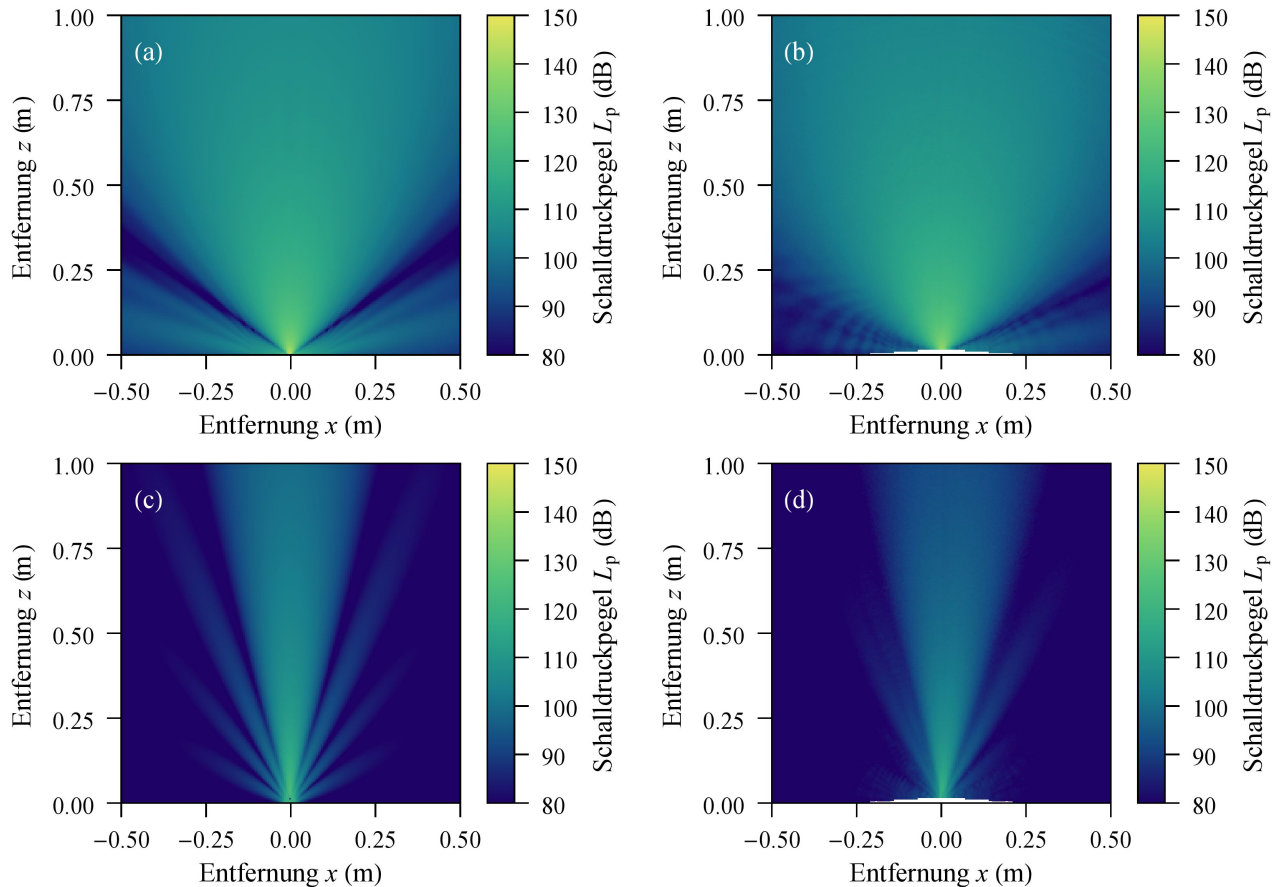
Die Erregung des MA40B8S erfolgt wie für die koaxiale Anordnung. Hierbei wird ein rechteckiges Burst Signal mit einer Periodendauer von  $0,015 \text{ ms}$  verwendet. In diesem Burst Signal werden 40 Zyklen mit einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  angeregt. Die angelegte Spannung beträgt  $V_{\text{pp}} = 20 \text{ V}$ . Die Erregung des SensComp600 erfolgt mit der selben Wechselspannung. Jedoch benötigt dieser noch zusätzlich eine Gleichspannung von  $200 \text{ V}$ . Die Schallschnelle über die Oberfläche der Aperturöffnung wird homogen mit  $v_n = 1 \text{ m s}^{-1}$  angenommen.

Die Simulationen werden unter Normalbedingung für das Medium Luft durchgeführt. Hierbei wird die Temperatur  $T = 293,15 \text{ K}$  und der stationäre Druck  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  gewählt. Die relevanten akustischen Größen  $\rho_0 = 1,204 \text{ kg m}^{-3}$  und  $c_0 = 343,3 \text{ m s}^{-1}$  können daraus berechnet werden.

Das Messergebnis [Abbildung 4.11 (b)] für den MA40B8S unterscheidet sich von der Simulation [Abbildung 4.11 (a)]. Hierbei ist ersichtlich, dass die Richtcharakteristik in der Messung nicht so ausgeprägt ist, wie es die Simulationsergebnisse des Modells hergeben. Hauptsächlich ist der Unterschied in dem Nulldurchgang des Schallfeldes zu erkennen. In der Simulation liegt dieser bei dem Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 55^\circ$  und in der Messung bei  $\vartheta = \pm 66^\circ$ .

Im Folgenden werden die Unterschiede zwischen den Ergebnissen von der Simulation und der Messung erläutert und begründet, warum das simulierte Schallfeld von dem Modell von den Messergebnissen des realen Ultraschallwandlers abweicht. Dabei wird auf die Richtcharakteristik und im Speziellen auf den Öffnungswinkel des Nulldurchgangs eingegangen. Die Unterschiede werden dabei in zwei Gruppen unterteilt. Diese unterteilen sich zum einen in Modellvereinfachung und zum anderen durch Annahmen für die Randbedingungen und der Eigenschaften des Mediums. Zunächst wird auf die vorgenommenen Annahmen des Ultraschallwandlers und der umgebenen Luft eingegangen. Diese umfassen zum einen die Temperatur und den stationären Druck der umgebenen Luft in dem reflexionsarmen Raum und zum anderen die Geometrie und die Verteilung der Schallschnelle auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers. Während der Messung wurde die Temperatur in dem reflexionsarmen Raum gemessen. Im Gegensatz zu der Messung der koaxialen Anordnung war diese zwischen  $26^\circ\text{C}$  und  $27^\circ\text{C}$ . Durch die Temperaturerhöhung ergibt sich auch eine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit, die sich auf die Ausbreitung der Schallwelle auswirkt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit für eine Temperatur von  $26^\circ\text{C}$  beträgt  $c_0 = 346,1 \text{ m s}^{-1}$ . Durch die größere Ausbreitungsgeschwindigkeit verkleinert sich die Wellenzahl und somit auch die resultierende Helmholtz Zahl. Dadurch ist die Hauptkeule breiter und der Nulldurchgang bei einem größeren Öffnungswinkel. Hierbei beträgt der Unterschied des Öffnungswinkels für den Nulldurchgang ungefähr





**Abbildung 4.11.:** Schallfeldcharakterisierung von dem Ultraschallwandler MA40B85 (a,b) und dem SensComp600 (c,d). Beide Ultraschallwandler werden bei einer Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  und einer Wechselspannung  $V_{pp} = 20 \text{ V}$  betrieben. Der SensComp600 wird zusätzlich mit einer Gleichspannung von  $200 \text{ V}$  versorgt. Die Schallfelder wurden entsprechend ihrer Geometrie simuliert (a,c) und messtechnisch charakterisiert (b,d).

$0,84^\circ$ . Dieser ergibt sich nur durch den Unterschied zwischen der angenommenen Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  und der gemessenen Temperatur von ungefähr  $26^\circ\text{C}$ .

Die zweite relevante Größe für die Simulation ist die Dichte  $\rho_0$ . Im Gegensatz zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit hat sie keinen direkten Einfluss auf die Richtcharakteristik in der Simulation. Dennoch beeinflusst diese die Amplitude des Schalldrucks. Aufgrund der Veränderungen der Temperatur und des stationären Drucks während einer Messung können Veränderungen der Dichte auftreten. Durch die Veränderung der Amplitude wird sich dann auch die gemessene Richtcharakteristik daran anpassen. Jedoch sind die Änderungen der Raumtemperatur und des stationären Drucks träge und wirken sich somit nicht auf die kurzen Messzeiten zwischen den Raumpunkten aus. Die resultierende stationäre Dichte betrug während der gesamten Messung  $\rho_0 = 1,67 \pm 0,0028 \text{ kg m}^{-3}$ , wodurch die gemessene Amplitude des Schalldruck um  $\pm 0,16\%$  im Vergleich zur Simulation schwankte. Bei der Simulation ist hingegen die stationäre Dichte konstant. Daher wirkt sich die Dichte nur geringfügig auf die Amplitude des Schalldrucks aus und hat somit einen unwesentlichen Einfluss auf die Richtcharakteristik.

Neben den Annahmen des umgebenden Mediums wirken sich auch die geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Ultraschallwandlers auf die Unterschiede zwischen den Simulationsergebnissen und den Messergebnissen aus. Hierbei zeigt sich, dass die Aperturgröße die Richtcharakteristik wesentlich beeinflusst. Dieses ist begründet durch die Helmholtz Zahl (Kapitel 2.4.2) und wirkt sich daher wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit direkt auf die Richtcharakteristik aus. Aus diesem Grund wird die



---

angenommene Größe der Geometrie von  $a = 6,4 \text{ mm}$  in den Simulationen verglichen mit der Messunsicherheit von  $\pm 0,05 \text{ mm}$ . Die Abweichung der gemessenen Aperturöffnung bewirkt, dass sich der Nulldurchgang für eine kleinere Apertur bei einem größeren Öffnungswinkel ausbildet. Bei der Reduzierung der Apertur um  $-0,05 \text{ mm}$  ist der Nulldurchgang bei einem  $0,65^\circ$  größeren Öffnungswinkel. Daher lässt sich schlussfolgern, dass die Größe der Apertur einen wesentlichen Einfluss auf die charakteristische Schallausbreitung hat.

Darüber hinaus ist auch die Verteilung der Schallschnelle über die Oberfläche von besonderer Bedeutung. In den bisherigen Simulationen wird immer von einer homogenen Verteilung der Schallschnelle ausgegangen. Jedoch ist davon auszugehen, dass diese sich nicht exakt gleichmäßig verteilt, sondern wahrscheinlich mit dem zunehmenden Radius vom Mittelpunkt abnimmt. Durch die Abnahme der Schallschnelle wird der Anteil der akustischen Apertur am Rand weniger stark gewichtet als im Mittelpunkt. Aufgrund der geringeren Schallschnelle am Rand verändert sich die Schallausbreitung und somit auch die Richtcharakteristik. Jedoch konnte die Verteilung der Schallschnelle über die Oberfläche nicht ermittelt werden, sodass keine Untersuchungen dieses Einflusses vorgenommen werden konnten. Es gibt verschiedene Verteilungsfunktionen der Schallschnelle über kreisförmige Kolbenstrahler [2] aus denen ersichtlich wird, dass die Verteilung der Schallschnelle auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers einen signifikanten Einfluss auf die Lösung hat. Hierbei verschiebt sich zum einen der Nulldurchgang und die Nebenkeulen werden je nach Verteilungsfunktion abgeschwächt. Daher kann die Verteilung der Schallschnelle auf der Oberfläche des Ultraschallwandlers maßgeblich den Unterschied zwischen der Simulation und der Messung verursachen.

Neben den beschriebenen Annahmen können auch die Vernachlässigung der Dämpfung und den Nichtlinearitäten des Mediums und der elektrisch mechanischen Wandlung in dem Modell die Unterschiede zwischen den simulierten und gemessenen Ergebnissen verursachen. Die Dämpfung durch die Absorption des Mediums ist zum einen von dem Abstand und zum anderen durch die Frequenz bei konstanten räumlichen Bedingungen der Luft abhängig (Kapitel 2.5.1). Dadurch würde sich zwar der Schalldruckpegel mit zunehmenden Abstand von dem Ultraschallwandler reduzieren, jedoch hat die Absorption keinen direkten Einfluss auf die Richtcharakteristik der Schallausbreitung. Somit resultieren die Unterschiede der Simulation und der Messung nicht durch die in dem Modell vernachlässigten Absorption von dem Mediums.

Hingegen werden durch die Nichtlinearität Oberwellen erzeugt. Diese Oberwellen haben eine höhere Frequenz und somit eine größere Helmholtz Zahl. Anhand der Superposition der Schallausbreitung mit mehreren Frequenzen können sich dann weitere Nebenkeulen ausbilden oder die ursprüngliche Lage der Nebenkeulen verändern. Hierbei ist neben der Helmholtz Zahl auch die Gewichtung der jeweiligen Frequenzanteile wichtig, um den Einfluss auf die resultierende Schallausbreitung zu ermitteln. Dazu wurden die Amplituden der harmonischen Erregung und der ersten zwei Oberwellen mithilfe der FFT ermittelt. Anschließend wurde die resultierende Richtcharakteristik, welche sich aus diesen drei Wellen zusammensetzt berechnet und mit der Richtcharakteristik der reinen harmonischen Erregung verglichen. Durch die sehr viel kleinere Amplitude der ersten Oberwelle und gar der zweiten Oberwelle im Verhältnis zur harmonischen Erregung, haben diese das Schallfeld kaum beeinflusst. Die Hauptkeule ist im Vergleich zur Richtcharakteristik bei der rein harmonischen Erregung etwas schmaler. Trotz der zusätzlich höheren Frequenzanteile bildet sich der Nulldurchgang ungefähr bei dem selben Öffnungswinkel aus und ist im Vergleich zur reinen harmonischen Erregung um  $0,01^\circ$  kleiner. Aus diesem Grund lässt sich schlussfolgern, dass die höheren Frequenzanteile einen untergeordneten Einfluss an der Schallausbreitung besitzen.

Bei dem Vergleich aller möglichen Einflüsse auf die Schallausbreitung, verursacht die Annahme bei der Geometrie des Ultraschallwandlers und der Verteilung der Schallschnelle auf dessen Oberfläche hauptsächlich die Unterschiede in den simulierten und gemessenen Richtcharakteristiken. Zum genaueren Simulieren des Schallfeldes dieses Ultraschallwandlers wäre es daher erforderlich die Schallschnelle auf der Oberfläche zu ermitteln. Jedoch konnte diese bisher nicht messtechnisch erfasst werden, sodass zum

Zeitpunkt dieser Arbeit keine genauere Simulation für diesen Ultraschallwandler durchgeführt werden konnte.

Dahingegen stimmt die Simulation des SensComp600 [Abbildung 4.11 (c)] besser mit der Messung [Abbildung 4.11 (d)] überein. Hierbei zeigt sich, dass der Öffnungswinkel der Hauptkeule in der Simulation bei  $\vartheta = \pm 15^\circ$  liegt und in der Messung  $\vartheta = \pm 17^\circ$  beträgt. Auch die erste Nebenkeule liegt sowohl für die Simulation als auch für die Messung ungefähr in dem selben Bereich. Sie liegt für die Simulation der positiven ersten Nebenkeule in dem Bereich von  $\vartheta = 19^\circ$  bis  $\vartheta = 28^\circ$  und für die negative erste Nebenkeule in einem Bereich von  $\vartheta = -19^\circ$  bis  $\vartheta = -28^\circ$ . Bei der Messung ist der Bereich des Öffnungswinkels für die positive erste Nebenkeule von  $\vartheta = 24^\circ$  bis  $\vartheta = 33^\circ$  und für die negative erste Nebenkeule von  $\vartheta = -19^\circ$  bis  $\vartheta = -31^\circ$ . Trotz der guten Übereinstimmung der Richtcharakteristik ist der Schalldruck bei der Messung nicht so stark ausgeprägt. Dieses liegt hauptsächlich an der reduzierten Wechselspannung von  $V_{pp} = 20\text{ V}$  anstatt der empfohlenen Wechselspannung von  $V_{pp} = 200\text{ V}$  [77]. Durch den geringeren Schalldruckpegel ist eine Messung schwieriger durchzuführen, weil der Abstand zwischen dem Signal und dem Rauschen größer wird. Deshalb sind die gemessenen Schalldruckpegel mit dem Mikrophon für kleine Werte anfälliger auf Störungen. Dadurch lassen sich für die nächsten zwei Nebenkeulen die Öffnungswinkel nicht quantifiziert bestimmen. Dennoch haben diese ungefähr die selbe Lage wie in der Simulation.

Im Gegensatz zur Messung des Murata MA40B8S wurde die Messung des SensComp600 unter nahezu idealen äußeren Bedingungen durchgeführt. Die Raumtemperatur betrug während der gesamten Messung  $T = 21,5 \pm 0,2^\circ\text{C}$ , welches durch die Messunsicherheit von  $\pm 1^\circ\text{C}$  als ideal angenommen werden kann. Die relative Luftfeuchtigkeit betrug während der Messung  $32 \pm 2\%$ , weshalb es sich um trockene Luft handelt. Der statische Druck lag bei  $p_0 = 992 \pm 4\text{ hPa}$ . Durch die Eigenschaften der umgebenen Luft als auch deren geringfügigen Schwankungen kann davon ausgegangen werden, dass das umgebene Medium einen geringen Einfluss auf die Messung des Schalldrucks für diesen Ultraschallwandler hat.

Trotz der guten Übereinstimmung der Messergebnisse mit den Simulationen gibt es geringfügige Unterschiede. Diese werden ähnlich zu der Messung des Murata MA40B8S durch die Geometrie als auch die Verteilung der Schallschnelle über die Oberfläche der Apertur verursacht. Dabei zeigte sich, dass die Annahme der Geometrie des SensComp600 wesentlich besser zutreffen als beim MA40B8S. Dieses liegt hauptsächlich daran, dass die Geometrie größer ist und somit der Fehler bei der Messung des Radius von diesem Ultraschallwandler weniger von der Messunsicherheit abhängt. Außerdem kann davon ausgegangen werden, dass die Verteilung der Schnelle auf der Oberfläche zum Rand ebenfalls abnimmt. Jedoch ist diese Reduzierung der Schallschnelle wahrscheinlich weniger ausgeprägt als beim Murata. Anhand der besseren Annahme der Geometrie als auch der Verteilung der Schallschnelle für diesen Ultraschallwandler sind somit die Ergebnisse der Simulation und der Messung in einer genaueren Übereinstimmung. Im Gegensatz zu dem Murata MA40B8S bilden sich keine Nichtlinearität durch die Wandlung des elektrischen Signals zu einer mechanischen Größe oder durch den hohen Schalldruckpegel in dem Medium aus. Dieses ist anhand des Spektrums (Abbildung 4.4) zu erkennen, da nur der erste harmonische Frequenzanteil eine signifikante Amplitude besitzt und sich keine Oberwellen ausbilden. Aus diesem Grund verursachen die geometrischen Unterschiede und die Verteilung der Schallschnelle auf der Oberfläche der Apertur die Abweichungen zwischen der Simulation und der Messung.

Daher lässt sich für die Simulationen schlussfolgern, dass die Randbedingungen durch die Geometrie und die Verteilung der Schallschnelle über die Oberfläche des Ultraschallwandlers fundamental sind. Diese Randbedingungen haben einen entscheidenden Anteil an dem Simulationsergebnis und müssen daher möglichst genau die physikalischen und geometrischen Gegebenheiten widerspiegeln. Es empfiehlt sich daher entweder über Simulationen oder durch Messungen die Verteilung der Schallschnelle von den Ultraschallwandlern zu ermitteln und diese dann in den Programmcode mit zu implementieren. Auch die äußeren Bedingungen der umgebenen Luft sollten in der Simulation beziehungsweise bei der Auswertung der Messergebnisse berücksichtigt werden. Durch die Temperatur, der relativen Luftfeuchtigkeit als auch dem statischen Druck wird Schallausbreitung beeinflusst. Hierbei wirken sich diese Größen auf die stationäre Dichte als auch auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit aus, welche die physikalischen Ei-

---

enschaften und somit die charakteristische Schallausbreitung beeinflussen. Abschließend müssen auch die Einflüsse der Dämpfung durch das Medium und der Nichtlinearitäten bei Auswertung der Messergebnisse berücksichtigt werden. Hierbei sind von besonderer Bedeutung die Entfernung zwischen dem Ultraschallwandler und dem simulierten und gemessenen Feldpunkt, die Frequenz und die Amplitude der Schallschnelle beziehungsweise dem maximalen Schalldruck. Die Dämpfung durch das Medium ist von der Frequenz und der Entfernung abhängig. Das beschriebene Modell besitzt die Möglichkeit, dass die Dämpfung durch das Medium in dem Programmcode in Mathematica integriert werden kann. Demgegenüber können die Nichtlinearitäten durch das Medium nicht in das Programm integriert werden, sodass hierfür ein neues Modell entworfen werden muss. Aus diesem Grund ist darauf zu achten, dass der Schalldruckpegel nicht die empfohlenen Werte zwischen  $L_p = 130$  dB und  $L_p = 140$  dB überschreitet, sodass das Modell für die Vorhersage der Schallausbreitung verwendet werden kann.

---

## 5 Schallabstrahlung von Ultraschall Gruppenwandlern

---

In der Ultraschalltechnik gibt es eine Vielzahl von verschiedenen geometrischen Anordnungen von Gruppenwandlern. Diese bestehen aus einzelnen Ultraschallwandlern, die je nach Anwendungsgebiet in der Form und der Lage variieren können. Dabei können sich die einzelnen Elemente in einer Ebene befinden oder räumlich verteilen, wie es zum Beispiel bei konvexen oder konkaven [81] Gruppenwandlern angewendet wird. Bei einer ebenen Anordnung gibt es auch sehr viele Varianten die einzelnen Ultraschallwandler zueinander zu positionieren. Es gibt unter anderem multidimensionale, hexagonale oder spirale Gruppenwandler [82, 83]. Anhand eines zweidimensionalen Gruppenwandlers kann sowohl die Fokussierung als auch das Schwenken der Hauptkeule in zwei Richtungen realisiert werden. Diese wird über die elektronische Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler mit verschiedenen Phasen zueinander umgesetzt. Darüber hinaus kann auch die Form der charakteristischen Schallausbreitung durch die Apodisation verändert werden. Dabei wird die Amplitude der Schallschnelle von den einzelnen Ultraschallwandlern nach einer vorgegebenen Verteilung [84] verändert. Aufgrund der elektronischen Ansteuerung und der geometrischen Verteilung der einzelnen Ultraschallwandler eignen sich die zweidimensionalen Ultraschall Gruppenwandler sehr gut für eine Vielzahl von Anwendungen. Durch die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten von diesem Ultraschall Gruppenwandler und der flexiblen Gestaltungsmöglichkeiten der Schallausbreitung wird diese Art in dieser Arbeit verwendet.

In diesem Kapitel wird zunächst ein gefertigter Prototyp [18] präsentiert und anhand dessen die Modellbildung erläutert. Anschließend erfolgt die Beschreibung der Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler, mit der die Hauptkeule und die Schallausbreitung ausgerichtet werden kann. Basierend auf diesem Modell werden Simulationen für verschiedene Ansteuerungen der Ultraschallwandler durchgeführt. Zu Vergleichszwecken wird ein weiteres Modell in COMSOL mit der BEM erstellt und die resultierenden Ergebnisse mit dem zuvor entwickelten Modell in Mathematica verglichen und validiert. Abschließend erfolgt die messtechnische Charakterisierung des Ultraschall Gruppenwandlers mit dem zuvor vorgestellten Messaufbau (Kapitel 4.3) und die Messergebnisse werden anschließend ebenfalls zur Validierung des erstellten Modells verwendet.

---

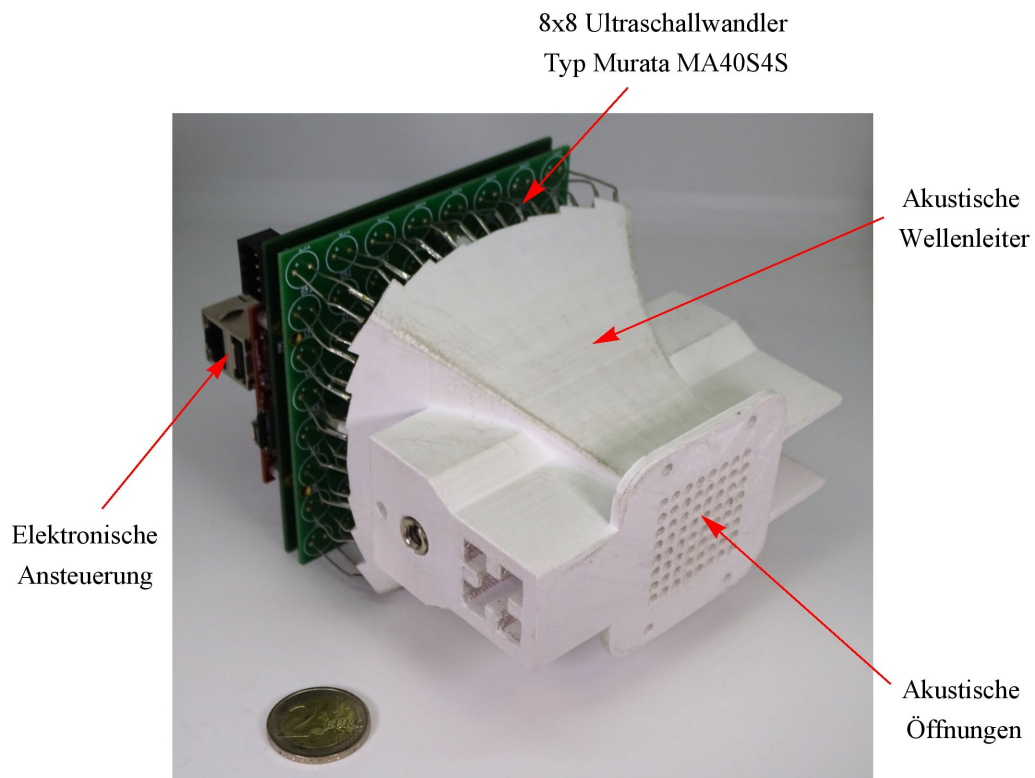
### 5.1 Aufbau und Modellbildung des Gruppenwandlers

---

Der Ultraschall Gruppenwandler ist aus den einzelnen Ultraschallwandlern des Typs MA40S4S der Firma Murata gefertigt. Der grundsätzliche Aufbau dieses Ultraschallwandlers ist ähnlich zu dem MA40B8S (Kapitel 4.1), jedoch sind die geometrischen Abmessungen kleiner. Dieser Ultraschallwandler hat dabei einen Außendurchmesser von 9,9 mm und eine Höhe von 7,1 mm [75]. Beim Entwurf von phasengesteuerten Ultraschall Gruppenwandlern müssen konstruktive Regeln eingehalten werden. Dazu darf der Elementabstand nicht größer als die halbe Wellenlänge sein. Zur Realisierung dieses Kriteriums wird die Apertur durch akustische Wellenleiter reduziert. Dabei befindet sich auf der einen Seite des Wellenleiters der Ultraschallwandler und auf der anderen Seite wird der Schall in das Medium abgestrahlt. Durch die radiale Verengung des Wellenleiters mit zunehmender Länge wird das Kriterium der halben Wellenlänge für die Aperturöffnungen erreicht.

In einem ersten Prototypen wurde die akustische Apertur händisch durch Schrumpfschläuche [17] verkleinert. Dieser Ultraschall Gruppenwandler besteht aus 12x8 Ultraschallwandlern des Typs MA40S4S, welche durch die Wellenleiter auf eine rechteckige Form mit 12x8 akustischen Öffnungen reduziert werden. Der hergestellte Prototyp ist zum Schwenken der Hauptkeule in einer Richtung und in einem Bereich von  $\pm 55^\circ$  geeignet. Dieser Prototyp ist weiterentwickelt worden (Abbildung 5.1). Hierbei wurden 8x8 Ultraschallwandler von dem selben Typ MA40S4S verwendet. Die Wellenleiter sind aus dem Werkstoff Polylactide (PLA) in einem dreidimensionalen Druckverfahren hergestellt worden [18]. Dadurch sind die Wellenleiter des zweiten Prototyps akkurater gefertigt. Der Gruppenwandler hat eine rechteckige Form

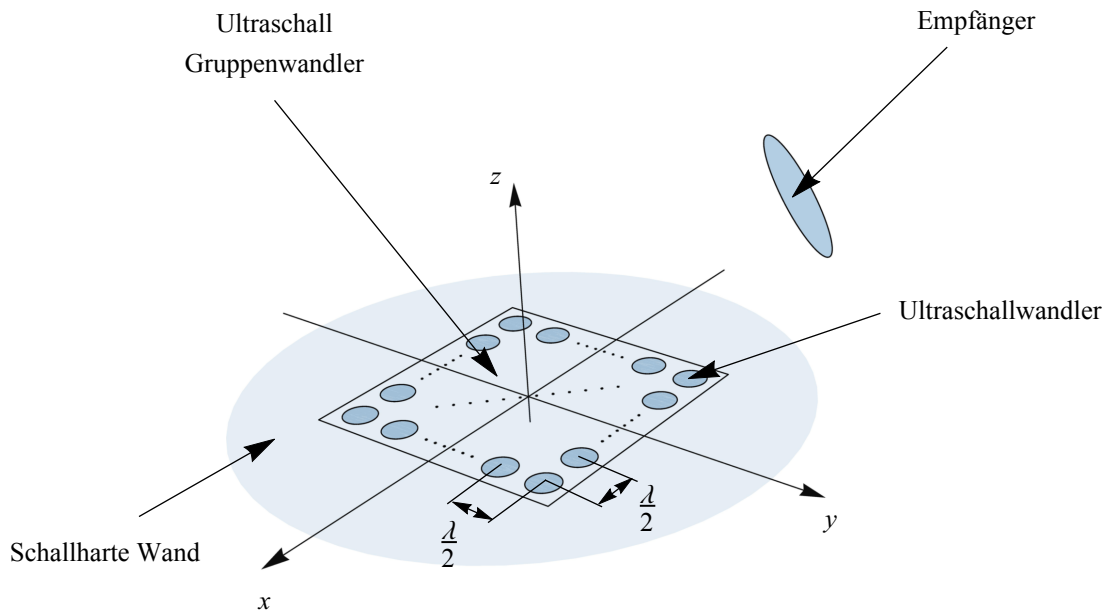
mit gleichmäßig verteilten kreisförmigen Öffnungen. Die Öffnungen der Aperturen haben den Radius  $a = 1.7 \text{ mm}$  und besitzen einen Elementabstand von  $4,3 \text{ mm}$  zueinander. Darüber hinaus ermöglicht eine elektronische Ansteuerung das Ausrichten der Hauptkeule in zwei Richtungen. Zur messtechnischen Schallfeldcharakterisierung wird der Ultraschall Gruppenwandler an eine schallharte Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 125 \text{ mm}$  befestigt. Hierbei befinden sich in der schallharten Wand Löcher, sodass der Schall aus den Wellenleitern in das Medium abgestrahlt wird.



**Abbildung 5.1.:** Prototyp des Gruppenwandlers [18] mit 8x8 Ultraschallwandlern des Typs MA40S4S. Die geometrische Reduzierung der akustischen Aperturen wurde mithilfe eines dreidimensionalen Druckverfahrens umgesetzt. Die Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler wird über eine elektronische Schaltung realisiert.

Anhand der Geometrie des gefertigten Prototypen wird ein Modell erstellt (Abbildung 5.2), mit dem die Simulation des Schallfeldes durchgeführt werden kann. Hierbei sind die Größe der akustischen Aperturen, die Lage zueinander und die jeweilige Ansteuerung in das bestehende Modell integriert worden. Bei dem bisherigen Modell wird die Schallausbreitung eines einzelnen Ultraschallwandlers betrachtet (Kapitel 4.5), welcher im Folgenden durch den Gruppenwandler mit 8x8 Aperturen ersetzt wird. Das erstellte Modell für den Ultraschall Gruppenwandler basiert auf dem KHI, sodass die finite Abmessung der umgebenen schallharten Wand berücksichtigt wird. Die Anordnung des gesamten Gruppenwandlers ist durch die regelmäßige Struktur der einzelnen akustischen Öffnungen geprägt und hat eine quadratische Grundform. Die einzelnen kreisförmigen Aperturen haben entsprechend des Prototypen jeweils einen Radius  $a = 1,7 \text{ mm}$  und der Abstand zwischen den Mittelpunkten dieser Öffnungen beträgt  $4,3 \text{ mm}$ . Dabei bezieht sich der Elementabstand auf die waagerechten und senkrechten Aperturen zueinander. Der Koordinatenursprung des Modells wird in den Mittelpunkt des gesamten Ultraschall Gruppenwandlers

gelegt. Dieser Koordinatenursprung ist auch der Referenzpunkt für das Schwenken und Fokussieren der Schallausbreitung beziehungsweise der Hauptkeule.

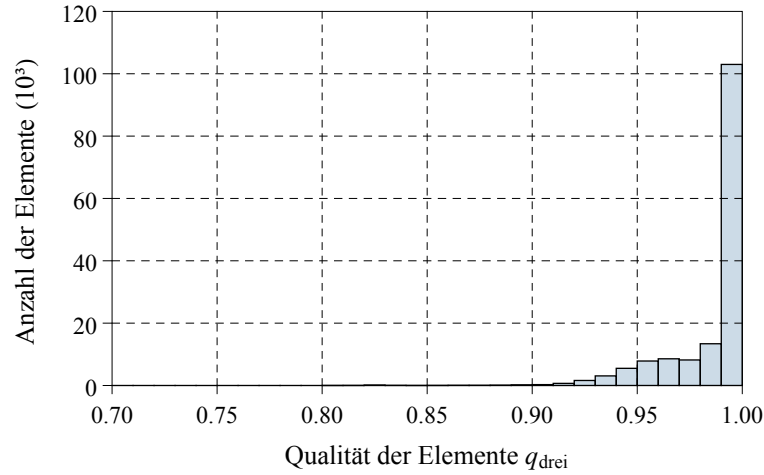


**Abbildung 5.2.:** Modellaufbau eines Ultraschall Gruppenwandlers mit einer beliebigen Anzahl von kreisförmigen Aperturen. Diese akustischen Öffnungen befinden sich in einer schallharten Wand und haben einen Elementabstand der halben Wellenlänge. Der Empfänger wird mit einer kreisförmigen Apertur modelliert, sodass der Schalldruck über diese gemittelt wird und somit zur Validierung mit den Messergebnissen verwendet werden kann.

Die akustischen Aperturen befinden sich in einer schallharten Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 125 \text{ mm}$ . Die Oberfläche ist wie in den vorherigen Fällen mit dem DistMesh-Algorithmus [13] diskretisiert worden. Hierbei werden sowohl die Öffnungen der akustischen Aperturen als auch die schallharte Wand in einem gemeinsamen Gitter trianguliert. Jedoch ist bei der Gittererzeugung darauf geachtet worden, dass die Elemente die akustischen Aperturen möglichst gut annähern ohne sich mit der schallharten Wand zu vereinigen. Das gesamte Gitter besteht aus 152674 Dreiecken und besitzt eine hervorragende Qualität (Abbildung 5.3). Das Qualitätskriterium wird wieder nach dem Verhältnis von dem Innenradius zum Außenradius der Dreiecke gebildet (Kapitel 3.4.2). Das erzeugte Gitter hat eine durchschnittliche Qualität von  $\bar{q}_{\text{drei}} = 0,987$  und das am schlechtesten erzeugte Dreieck in diesem Gitter hat eine Qualität von  $q_{\text{drei}} = 0,806$ . Dabei hat selbst dieses schlecht geformte Dreieck noch eine sehr gute Qualität. Aus diesem Grund kann gewährleistet werden, dass sich das erzeugte Gitter sehr gut für die Simulation des Schalldrucks sowohl auf der Oberfläche als auch im Innenraum des Volumens eignet.

Neben der Qualität des Gitters sind auch die Anzahl der Knoten pro Wellenlänge zur Simulation des Schallfeldes von Bedeutung. Hierbei soll diese Knotenanzahl nicht kleiner als sechs Knoten pro Wellenlänge betragen. Die Knotenanzahl wird zum einen durch die Elementanzahl und zum anderen durch die Gauß'sche Integrationsordnung gebildet (Kapitel 3.4.1). Dabei kann die Anzahl der Knoten pro Wellenlänge durch ein feineres Gitter oder durch eine höhere Gauß'sche Quadratur vergrößert werden.





**Abbildung 5.3.:** Qualität des Gitters für den Gruppenwandler mit 8x8 kreisförmigen Aperturen mit einer umgebenen schallharten Wand mit dem Radius  $a_{\text{wand}} = 125$  mm. Die Qualität wird entsprechend der Gleichung (3.14) auf das Verhältnis der Radien der triangulierten Elemente bezogen (Kapitel 3.4.2).

Wie bereits bei einem einzelnen Ultraschallwandler festgestellt wurde (Kapitel 3.4.4), eignet sich eine Quadratur mit sieben GP sehr gut zur Simulation des Schallfeldes. Aus diesem Grund wird neben dem erzeugten Gitter diese Quadratur angewendet. Daraus ergibt sich eine gesamte Knotenanzahl auf der Oberfläche von 1068718 Knoten, was ungefähr 27 Knoten pro Wellenlänge entspricht. Anhand der sehr guten Gitterqualität und der großen Anzahl der Knoten pro Wellenlänge sind sowohl die geometrischen als auch die physikalischen Randbedingungen sehr gut approximiert worden.

Die diskretisierte Oberfläche bildet wie beim einzelnen Ultraschallwandler die Grundlage für die Simulation des Schallfeldes. Aufgrund mehrerer akustischer Aperturen und des geplanten Ansteuerns der Elemente mit verschiedenen Amplituden und Phasen müssen noch die Randbedingungen detailliert erläutert werden. Hierbei gilt grundsätzlich das hergeleitete KHI beziehungsweise davon die diskrete Darstellung, welche durch die Gleichung (3.23) beschrieben wird. Auch die Lösung des Gleichungssystems mit der Gleichung (3.22), welche zum Berechnen des Schalldrucks auf der Oberfläche verwendet wird, behält ihre Gültigkeit. Aus diesem Grund wird nur die Verteilung der Schallschnelle für die jeweilige Apertur vorgegeben. Dazu werden die einzelnen Öffnungen mit den Indizes  $\chi$  für die waagerechten Aperturen in x-Richtung und  $\nu$  für die senkrechten Aperturen in y-Richtung bezeichnet. Die Schallschnelle der Aperturen wird mit der Gleichung

$$v_{n_{\chi,\nu}} = A_{\chi,\nu} e^{-j\Delta\varphi_{\chi,\nu}} \quad (5.1)$$

berechnet. Dabei gibt  $A_{\chi,\nu}$  die Amplitude der Schallschnelle ( $\text{ms}^{-1}$ ) und  $\Delta\varphi_{\chi,\nu}$  die Phasenverschiebung (rad) des jeweiligen Elements an. Anhand der Festlegung der Amplitude und der Phasenverschiebung kann die Schallausbreitung des Gruppenwandlers gesteuert werden. Im nächsten Abschnitt wird detailliert erläutert, wie mit der Ansteuerung der einzelnen Aperturen die Schallausbreitung von dem Ultraschall Gruppenwandler verändert werden kann. Anschließend erfolgt die Simulation des Schallfeldes wie für einen einzelnen Ultraschallwandler (Kapitel 3.5.1 und 4.5), nur das für den Gruppenwandler die Verteilung der Schallschnelle über die akustischen Aperturen nicht homogen erfolgt. Die Mittelung des Schalldrucks über die Oberfläche des Empfängers wird für den Vergleich zwischen den Messungen und den Simulationen berücksichtigt (Kapitel 5.4). Hierzu wird die Apertur des Mikrophons 4138 von B&K mit dem Radius  $b = 1,5$  mm (Kapitel 4.3) verwendet. Zum Vergleich zwischen den Simulations-

ergebnissen dieses Modells und einem entwickelten BEM Modell in COMSOL (Kapitel 5.3) wird jedoch von einem Punktempfänger ausgegangen.

## 5.2 Ansteuerung der Ultraschallwandler des Gruppenwandlers

Mithilfe der Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler können sowohl die Ausrichtung, die Fokussierung [85] oder die Unterdrückung von Nebenkeulen [84] in der Schallausbreitung umgesetzt werden. Die Apodisation der akustischen Aperturen ist eine hilfreiche Methode, mit der die Nebenkeulen reduziert werden können. Hierzu wird die Schallschnelle der akustischen Aperturen mit zunehmenden Abstand vom Koordinatenursprung reduziert. Diese Reduzierung erfolgt in diskreter Form für jede Apertur und unterliegt einer bestimmten Wichtungsfunktion [84]. Durch die Gewichtung der einzelnen Aperturen können die Nebenkeulen abgeschwächt werden. Hierbei vergrößert sich unter Umständen der Öffnungswinkel der Hauptkeule und es bilden sich dann keine Nebenkeulen mehr aus. Darüber hinaus können auch nur die Nebenkeulen reduziert werden. Bei dem vorgestellten Prototypen ist jedoch keine veränderliche Apodisation der Ultraschallwandler vorgesehen worden, sodass im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht weiter auf die Apodisation eingegangen wird. Trotzdem ist diese in dem Modell und dem Programmcode in Mathematica berücksichtigt, sodass bei der weiteren Entwicklung dieses Ultraschall Gruppenwandlers oder eines neuen Prototypen eine Schallfeldsimulation sowohl mit einer Apodisation, als auch einer Phasensteuerung der einzelnen Elemente durchgeführt werden kann. Aus diesem Grund ist zunächst für diesen Ultraschall Gruppenwandler eine homogene Amplitude  $A_{x,v} = 1 \text{ ms}^{-1}$  für die Schallschnelle von allen akustischen Aperturen verwendet worden.

Mit der Einstellung der Phasenverschiebung kann sowohl die Ausrichtung der Hauptkeule als auch die Fokussierung vorgenommen werden. Aufgrund der relativ kleinen akustischen Apertur zur Wellenlänge ergibt sich eine kurze Nahfeldlänge [2]. Bis zu dieser Entfernung kann eine Fokussierung mit der Phasensteuerung vorgenommen werden. Daher eignet sich der gefertigte Ultraschall Gruppenwandler eher zum Ausrichten der Hauptkeule. Deshalb wird im weiteren Verlauf ausschließlich die Ansteuerung zum Ausrichten der Hauptkeule sowohl bei Simulationen als auch bei den Messungen verwendet.

Wegen der gleichen Länge der Schallkanäle zwischen den Oberflächen der Ultraschallwandler und den akustischen Öffnungen müssen keine Phasenverschiebungen bei der elektronischen Ansteuerung berücksichtigt werden, sodass die Aperturen als Referenz der Phasenlage zueinander verwendet werden kann [18]. Die elektronische Ansteuerung der Ultraschallwandler muss in der Form erfolgen, dass sich die resultierende Wellenfront in eine Richtung ausbreitet. Diese Wellenfront wird über eine tangential Ebene an einer Halbkugelschale beschrieben. Die Halbkugel hat hierbei ihren Mittelpunkt in dem Koordinatenursprung und somit im Mittelpunkt des Gruppenwandlers. Der Radius der Halbkugel wurde auf 1 m festgelegt, sodass es sich um eine Einheitskugel handelt. Die tangential Ebene auf dieser Halbkugel wird mithilfe eines Normalenvektors beschrieben, welcher durch

$$\vec{n}_s(\varphi_s, \vartheta_s) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_s) \sin(\vartheta_s) \\ \sin(\varphi_s) \sin(\vartheta_s) \\ \cos(\vartheta_s) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

dargestellt wird. Hierbei ist  $\vec{n}_s$  der Normalenvektor, der die Ebene beschreibt. Dieser wird durch den Winkel  $\vartheta_s$  in der polaren Richtung und der Winkel  $\varphi_s$  in der azimuthalen Richtung vorgegeben. Die Ebene bildet die Grundlage zum Ausrichten der Hauptschallkeule und es kann mithilfe der Ansteuerung mit diesen zwei Winkeln festgelegt werden, in welche Richtung sich der Schall ausbreiten soll.

Anhand der vorgegebenen tangentialen Ebene und den Positionen der Aperturen, kann der euklidische Abstand zwischen der Ebene und den Aperturen ermittelt werden. Hierbei wird für die Berechnung des

Abstandes der Mittelpunkt der jeweiligen Apertur verwendet. Der Abstand zwischen der Ebene und den Mittelpunkten der Aperturen wird mit

$$R_{x,v}(\varphi_s, \vartheta_s) = \cos(\varphi_s) \sin(\vartheta_s) x_{x,v} + \sin(\varphi_s) \sin(\vartheta_s) y_{x,v} + 1 \quad (5.3)$$

berechnet [86]. In dieser Gleichung gibt  $R_{x,v}(\varphi_s, \vartheta_s)$  den euklidischen Abstand zwischen der Ebene und den Mittelpunkten der Aperturen an. Der Mittelpunkt der Apertur wird durch die  $x_{x,v}$  in x-Richtung und  $y_{x,v}$  in y-Richtung beschrieben. Anhand des Abstandes erfolgt dann die Berechnung der Phasenlage und der daraus resultierenden Phasenverschiebung der jeweiligen akustischen Apertur. Die Berechnung der Phasenverschiebung erfolgt mit

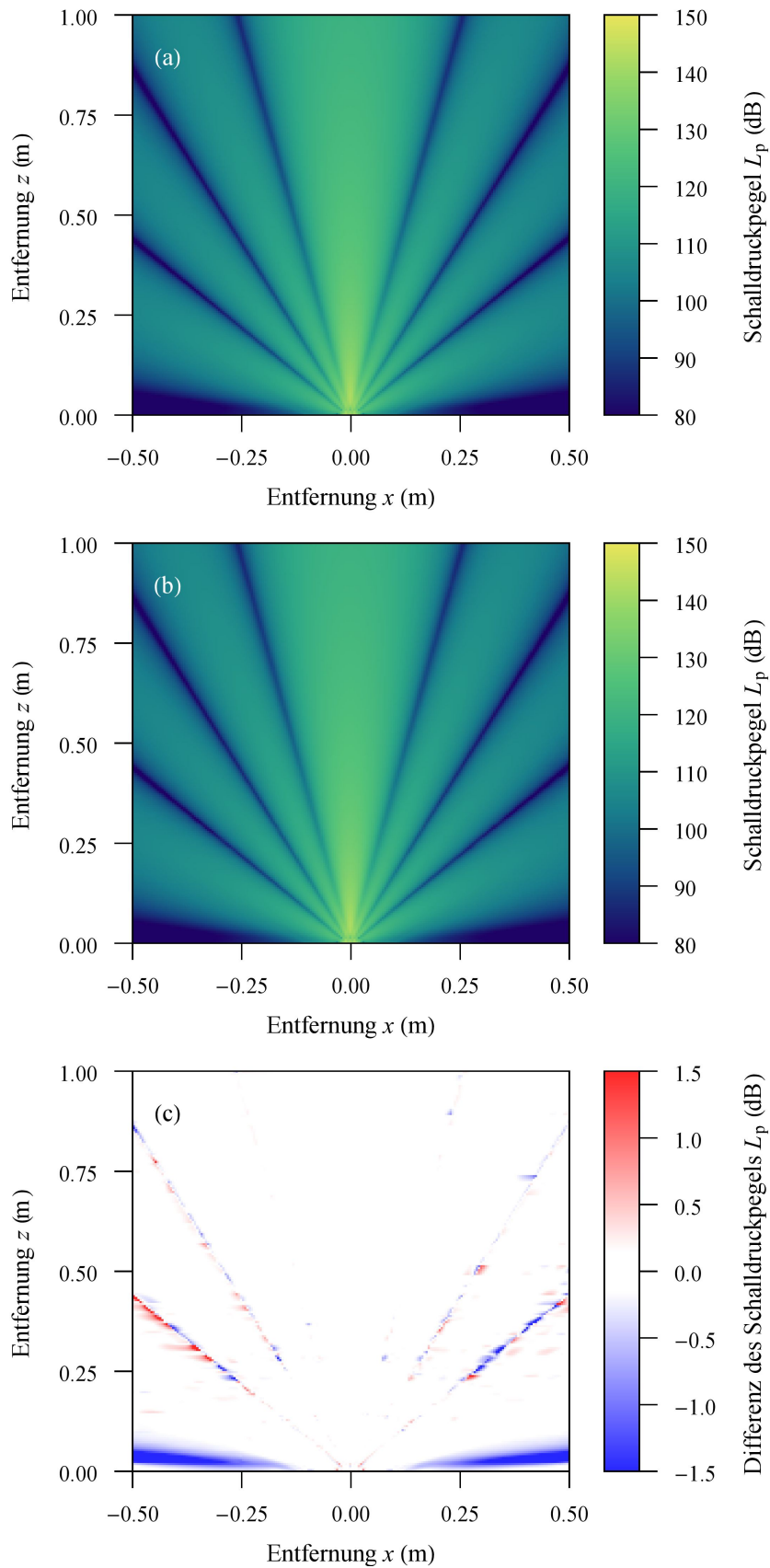
$$\Delta\varphi_{x,v} = kR_{x,v}(\varphi_s, \vartheta_s). \quad (5.4)$$

Mithilfe dieser berechneten Phasenverschiebung und der Festlegung der Amplitude der Schallschnelle mit  $A_{x,v} = 1 \text{ ms}^{-1}$  kann die Schallschnelle entsprechend der Gleichung (5.1) auf der Oberfläche der Aperturen ermittelt werden. Anhand der Festlegung der tangentialen Ebene und der daraus resultierenden Phasenverschiebung sind die Randbedingungen für die Schallfeldsimulationen festgelegt. Mit diesen festgelegten Randbedingungen erfolgt die Simulation entsprechend des in Kapitel 5.1 beschriebenen Ablaufs.

### 5.3 Simulation des Schallfeldes und Vergleich mit einem Modell in COMSOL

Neben dem beschriebenen Modell wird ein weiteres Modell zur Simulation des Schallfeldes in COMSOL unter der Verwendung der BEM erstellt. Anhand einer Simulation wird ein Vergleich zwischen dem entwickelten Modell in Mathematica und COMSOL durchgeführt. Dabei sollen die Simulationsergebnisse aus dem Programm von COMSOL zur Validierung des Modells in Mathematica verwendet werden. Auf dem Vergleich aufbauend, werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Modelle erläutert. Das grundsätzliche Vorgehen ist hierbei wie für den einzelnen Ultraschallwandler identisch (Kapitel 3.5.2), jedoch wird dieser durch den Gruppenwandler ersetzt. Die in den Simulationen verwendeten Geometrien entsprechen den des Prototypen (Kapitel 5.1).

Die Ergebnisse der simulierten Schallfelder in Mathematica und COMSOL sind für einen Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 84^\circ$  ungefähr identisch (Abbildung 5.4). Nur in den Nulldurchgängen unterscheiden sich die beiden Simulationsergebnisse, was durch die kleinen Schalldrücke in diesen Bereichen begründet ist. Der Schalldruckpegel unterscheidet sich auch zwischen den beiden Modellen bei einem Öffnungswinkel  $\vartheta \geq 84^\circ$  oder  $\vartheta \leq -84^\circ$ . Die Simulationsergebnisse unterscheiden sich in diesen Bereichen aufgrund der Annahme, dass die Mantelfläche der schallharten Wand einen geringfügigen Einfluss auf die Schallausbreitung besitzt. Währenddessen werden in dem Modell in COMSOL mit der BEM die Mantelfläche und die Rückseite der schallharten Wand in den Simulationen berücksichtigt. Die sich auf der Mantelfläche befindlichen Dipole besitzen zwar nur eine kleine Quellstärke, jedoch wirken sich diese in den Bereichen des Schallfeldes mit kleinen Schalldrücken besonders auf die Differenz des Schalldruckpegels aus. Das simulierte Schallfeld besitzt bei dieser geometrischen Anordnung und Erregung der einzelnen Ultraschallwandler einen kleinen Schalldruckpegel bei einem großen Öffnungswinkel, welcher sich in diesem Fall ab  $\vartheta \geq 84^\circ$  beziehungsweise bis  $\vartheta \leq -84^\circ$  erstreckt. Deshalb unterscheiden sich die beiden Simulationsergebnisse der erstellten Modelle. Werden die absoluten Schalldrücke betrachtet differieren die simulierten Ergebnisse unwesentlich voneinander. Aufgrund der sehr guten Übereinstimmung der beiden Simulationsergebnisse ist davon auszugehen, dass mit dem erstellten Modell in Mathematica das Schallfeld für einen großen Öffnungswinkel simuliert werden kann. Lediglich bei kleinen Schalldruckpegeln unterscheiden sich die Simulationsergebnisse.



**Abbildung 5.4.:** Schallwellenausbreitung eines Gruppenwandlers mit 8x8 Elementen in einer schallharten Wand ( $a_{\text{wand}} = 125 \text{ mm}$ ). Die Aperturen besitzen die Radien  $a = 1.7 \text{ mm}$  und den Elementabstand 4,3 mm. Die Abbildungen zeigen den Schalldruckpegel für das BEM Modell in Mathematica (a), das COMSOL Modell (b) und die Differenz der beiden Modelle (c).

---

## 5.4 Schallfeldvermessung und Simulation des Ultraschall Gruppenwandlers

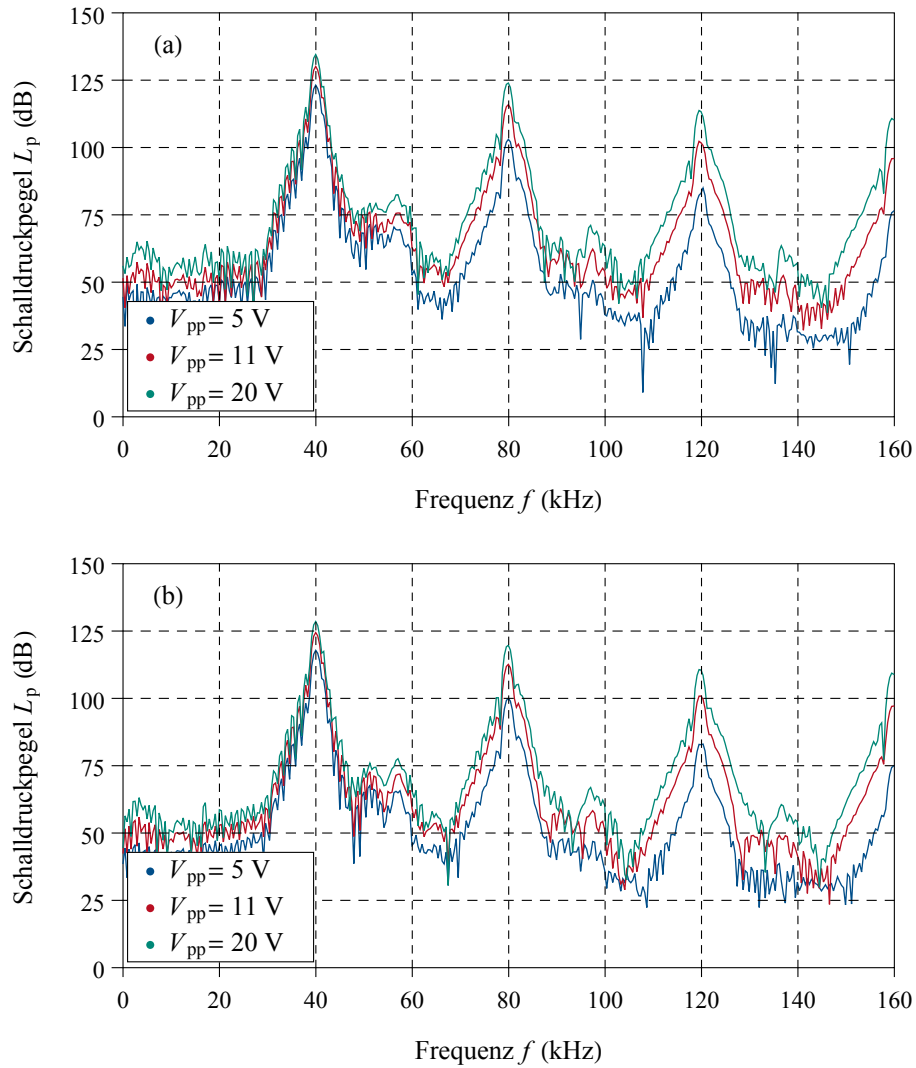
---

In diesem Kapitel erfolgt die messtechnische Charakterisierung der Schallausbreitung von dem vorgestellten Ultraschall Gruppenwandler (Abbildung 5.1). Die Simulation des Schalldrucks wird mit dem Modell auf der Basis des KHI und dem gemittelten Schalldruck über die Oberfläche des Mikrophons (Kapitel 5.1) durchgeführt. Die geometrischen Ausdehnungen des Gruppenwandlers und des Mikrophons entsprechen dabei den zuvor erläuterten Abmessungen. Mithilfe der Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler und somit der Festlegung der Phasenlage der akustischen Aperturen (Kapitel 5.2) wird das Ausrichten der Hauptkeule durchgeführt. Zur exemplarischen Ausrichtung der Schallausbreitung werden drei Testfälle ausgewählt. Hierbei werden die Ultraschallwandler zunächst für die natürliche Schallausbreitung bei  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 0^\circ$  angeregt. Bei den zwei anderen Fällen werden die Ultraschallwandler in der Form angesteuert, sodass die Hauptkeule zum einen für  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 30^\circ$  und zum anderen für  $\varphi_s = 45^\circ$  und  $\vartheta_s = 60^\circ$  ausgerichtet ist. Anhand der Messergebnisse soll das zuvor entwickelte Modell validiert werden. Dazu werden die Ergebnisse aus der Simulation und der Messung miteinander verglichen.

Die Ultraschallwandler wurden bei der ersten Messung mit der maximal möglichen Wechselspannung  $V_{pp} = 20\text{ V}$  betrieben. Der dabei größte gemessene Schalldruckpegel im gesamten Feld beträgt  $L_p \approx 152\text{ dB}$ . Aufgrund des sehr großen Schalldruckpegels können die Nichtlinearitäten durch das Medium nicht ausgeschlossen werden (Kapitel 2.5.2). Diese Form der Nichtlinearität kann jedoch mit den erstellten Modellen nicht abgebildet werden und dadurch würden die Messergebnisse, die diese physikalischen Gesetzmäßigkeiten beinhalten, gegebenenfalls von den Simulationsergebnissen abweichen. Deshalb soll der Einfluss der Nichtlinearitäten durch das Medium zur Validierung des Modells möglichst klein sein. Aus diesem Grund wird die angelegte Wechselspannung an den Ultraschallwandlern reduziert, um damit den Schalldruckpegel im gesamten Volumen zu verkleinern. Dazu wurde zunächst die Wechselspannung auf  $V_{pp} = 11\text{ V}$  abgesenkt. Bei dieser Spannung beträgt der maximal gemessene Schalldruckpegel  $L_p \approx 147\text{ dB}$ . Durch diesen hohen Schalldruckpegel wurde die Spannung an den Ultraschallwandlern auf die kleinst mögliche Ausgangsspannung der Elektronik reduziert. Die angelegte Spannung an den einzelnen Ultraschallwandlern beträgt  $V_{pp} = 5\text{ V}$ . Bei dieser Wechselspannung beträgt der maximal gemessene Schalldruckpegel  $L_p \approx 141\text{ dB}$ . Dieser gemessene Schalldruckpegel ist zwar immer noch groß, jedoch deutlich kleiner als bei der Ansteuerung der Ultraschallwandler mit  $V_{pp} = 20\text{ V}$ . Durch den resultierenden geringeren Schalldruck werden die Nichtlinearitäten durch das Medium weniger ausgeprägt und bilden sich auch räumlich weiter von dem Ultraschall Gruppenwandler aus. Durch diese Erkenntnis empfiehlt es sich, den Vergleich zwischen der Messergebnissen und der Simulationsergebnissen mit dieser Wechselspannung durchzuführen.

Trotz dieser Erkenntnis, dass die Reduzierung der Wechselspannung die nichtlinearen Anteile im Schallfeld verkleinert, wird eine detaillierte Untersuchung durchgeführt. Anhand dieser soll abgeschätzt werden, in welchem Ausmaß die Reduzierung der Wechselspannung die Nichtlinearitäten abschwächt. Dazu wird der ermittelte zeitliche Verlauf des Schalldruckpegels mithilfe der FFT in den Frequenzbereich transformiert und für die jeweiligen Signale ein Spektrum erstellt. Die verwendeten zeitlichen Verläufe des Schalldruckpegels werden hierbei in einem Abstand von  $z_p = 150\text{ mm}$  und  $z_p = 300\text{ mm}$  zwischen dem Gruppenwandler und dem Mikrophon gemessen.

Aus den Frequenzspektren geht hervor, dass sich neben der harmonischen Frequenz Oberwellen bei allen angelegten Wechselspannungen an den Ultraschallwandlern ausbilden (Abbildung 5.5). Durch das Ausbilden von höheren harmonischen Frequenzen lässt sich ableiten, dass eine lineare Verzerrung vorliegt und somit wie erwartet sich eine Nichtlinearität ausbildet. Dabei ist das Ausmaß der Nichtlinearität abhängig von der angelegten Wechselspannung an den Ultraschallwandlern. Bei einer kleineren Wechselspannung reduziert sich zwar auch die Amplitude der angeregten Frequenz, jedoch werden im Verhältnis dazu die die Amplituden der Oberwellen deutlich mehr abgeschwächt. Dieses wird durch den Vergleich zwischen den Amplituden der erregenden Frequenz zu den ersten zwei Oberwellen (Tabelle 5.1) deutlich. Hierbei ist der Schalldruck bei der Frequenz  $f = 40\text{ kHz}$  und der angelegten Wechselspannung



**Abbildung 5.5.:** Berechnete Frequenzspektren mithilfe der FFT von den gemessenen zeitlichen Signalen. Die Messungen wurden in einem Abstand zwischen dem Gruppenwandler und dem Mikrophon von  $z_p = 150$  mm (a) und  $z_p = 300$  mm (b) durchgeführt. Die Erregung der Ultraschallwandler erfolgte mit einer Frequenz  $f = 40$  kHz und verschiedenen Wechselspannungen  $V_{pp}$ .

$V_{pp} = 5$  V um ungefähr einen Faktor 3,7 kleiner als bei der Wechselspannung  $V_{pp} = 20$  V. Das Verhältnis zwischen den Schalldrücken für die beiden angelegten Spannungen beträgt ungefähr einen Faktor 11,1 bei der ersten Oberwelle und ungefähr einen Faktor von 27,5 bei der zweiten Oberwelle. Die beschriebenen Verhältnisse entsprechen hierbei einer Entfernung zwischen dem Gruppenwandler und dem Mikrophon von  $z_p = 150$  mm. Bei der größeren Entfernung  $z_p = 300$  mm sind diese Verhältnisse kleiner. Dabei beträgt dieses Verhältnis für die harmonische Erregung einen Faktor von ungefähr 3,4, für die erste Oberwelle 9,5 und für die zweite Oberwelle 24,3. Dennoch zeigt sich, dass durch die Reduzierung der Wechselspannung an den Ultraschallwandlern der Schalldruck für die harmonische Frequenz ausgeprägter gegenüber den Oberwellen ist.

Darüber hinaus lässt sich feststellen, dass der Schalldruck für die Oberwellen im Verhältnis zur harmonischen Erregung mit zunehmenden Abstand zwischen dem Gruppenwandler und dem Mikrophon weniger abfällt. Dieses sollte jedoch umgekehrt sein, weil die Absorption durch das Medium bei hohen Frequenzen größer ist. Dadurch lässt sich schlussfolgern, dass es zu einer Aufteilung des Schalldrucks kommt und deshalb die Oberwellen entstehen. Diese Aufteilung tritt bei allen verwendeten Wechselspannungen



**Tabelle 5.1.:** Gemessener maximaler Schalldruckpegel bei der harmonischen Frequenz und den ersten zwei Oberwellen. Diese Schalldruckpegel wurden aus dem Frequenzspektrum ermittelt. Dabei wurden zwei Spektren verwendet, die mithilfe der FFT aus den gemessenen Zeitsignalen in einer Entfernung von 150 mm und 300 mm berechnet wurden.

Entfernung $z_p$ zum Gruppenwandler (mm)	Spannung $V_{pp}$ (V)	$L_p$ (dB) bei $f = 40$ kHz	$L_p$ (dB) bei $f = 80$ kHz	$L_p$ (dB) bei $f = 120$ kHz
150	5	123,2	103,0	84,9
150	11	130,1	115,9	102,3
150	20	134,5	123,9	113,7
300	5	117,8	100,1	83,0
300	11	124,4	112,6	100,9
300	20	128,5	119,7	110,7

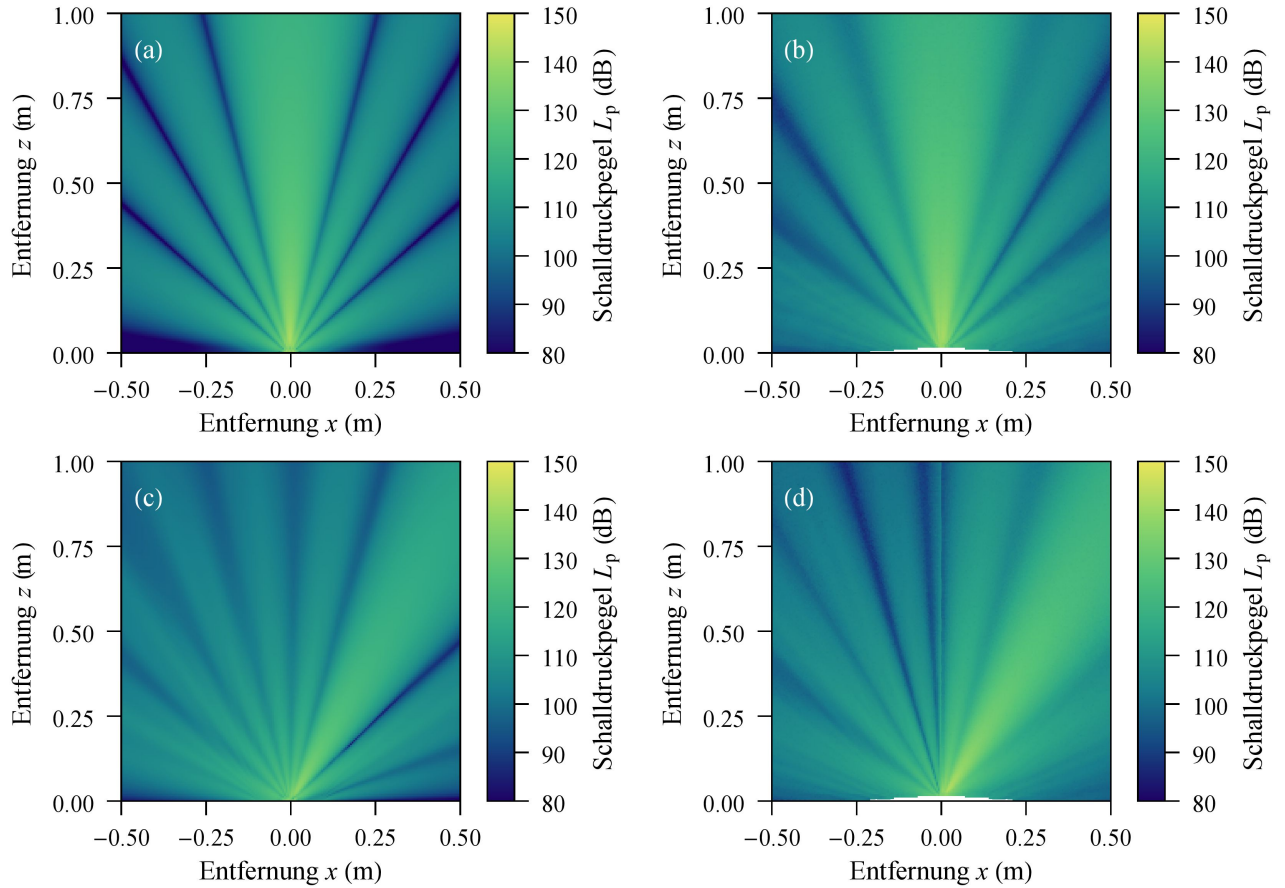
gen an den Ultraschallwandler auf. Trotzdem bewirkt eine größere Wechselspannung eine größere lokale Aufsteilung, was durch die Amplituden der Oberwellen im Verhältnis zur harmonischen Erregung zu entnehmen ist. Diese Aufsteilung tritt bei einer größeren Wechselspannung und somit bei einem größeren Schalldruckpegel in einer kürzeren Entfernung zum Ultraschall Gruppenwandler auf [37]. Um die Nichtlinearitäten hierbei zu vermeiden beziehungsweise zu minimieren sollte möglichst ein kleiner Schalldruckpegel vorliegen.

Neben dieser Nichtlinearität existiert auch eine Nichtlinearität durch die Wandlung der elektrischen Signale in eine mechanische Größen. Hierbei bewirken die verwendeten Ultraschallwandler ebenfalls eine lineare Verzerrung, was auf die Verwendung des piezoelektrischen Effekts zurückzuführen ist [76]. Dieses Verhalten wurde bereits in dem Kapitel 4.7 erläutert. Des weiteren haben auch die verwendeten Schallkanäle, mit denen die akustischen Aperturen der Ultraschallwandler reduziert wird, eine nichtlineare Auswirkung auf das Schallfeld [27]. Jedoch kann für die Schallausbreitung in dem Medium nicht abgeschätzt werden, wie sich diese Nichtlinearitäten auswirken.

Aufgrund der Erkenntnis, dass sich bei einer angelegten Wechselspannung  $V_{pp} = 5$  V die nichtlinearen Effekte am geringsten ausbilden, wird die Messung des Schallfeldes in dem gesamten Volumen mit dieser Wechselspannung durchgeführt. Hierbei wird zum einen das Schallfeld in der xz-Ebene und zum anderen auf einer Halbkugelschale in einem Abstand von einem Meter vom Gruppenwandler charakterisiert. Die messtechnische Charakterisierung des Schallfeldes in der xz-Ebene erfolgt von  $-0.5 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m}$  und  $0 \text{ m} \leq z \leq 1 \text{ m}$  und die hierfür verwendete Schrittweite beträgt in beide Richtungen  $\Delta x = \Delta z = 5 \text{ mm}$ . Anhand der Messergebnisse in dieser Ebene werden die Simulationsergebnisse des Modells für die Schallausbreitung in dem Volumen validiert.

Dabei werden die zwei Testfälle  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 0^\circ$ , sowie  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 30^\circ$  zum Ausrichten der Hauptkeule verwendet. Durch die Verwendung dieser Testfälle sollen Rückschlüsse gezogen werden, wie das Modell die physikalischen Eigenschaften des Ultraschall Gruppenwandlers in dem Volumen abbildet. Mithilfe der Simulation und der Messung auf der Halbkugelschale soll das Ausrichten der Hauptkeule und somit das Ansteuern der einzelnen Ultraschallwandler in dem Gruppenwandler untersucht werden. Hierbei werden die drei bereits vorgestellten Testfälle verwendet, bei denen die Ausrichtung der Hauptkeule sowohl in eine als auch in zwei Richtungen erfolgt. Zur Validierung des ausgerichteten Schallfeldes werden die Messungen für einen Bereich  $0^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ$  und  $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$  durchgeführt. Die verwendete Schrittweite für die beiden Winkel beträgt  $\Delta\vartheta = \Delta\varphi = 1^\circ$ .

Der Vergleich zwischen den Simulationen [Abbildungen 5.6 (a,c)] und den Messungen [Abbildungen 5.6 (b,d)] zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Daher wird die charakteristische Schallabstrahlung des Ultraschall Gruppenwandlers durch das erstellte Modell sehr gut abgebildet. Das wird hauptsächlich durch die Lage der Hauptkeule, den Nebenkeulen und der Nulldurchgänge deutlich. Jedoch wird aus der Messung des Schalldrucks [Abbildung 5.6 (b)] auch ersichtlich, dass dieses nicht komplett sym-



**Abbildung 5.6.:** Simulation (a,c) und Messung (b,d) des Schalldrucks von dem Ultraschall Gruppenwandler mit 8x8 akustischen Aperturen in der xz-Ebene. Hierbei erfolgt die Anregung der Ultraschallwandler mit einer Wechselspannung  $V_{pp} = 5\text{ V}$  und die Phasenlage zur Ausrichtung der Hauptkeule entspricht zum einen  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 0^\circ$  (a,b), sowie  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 30^\circ$  (c,d).

metrisch ist. Der zweite Nulldurchgang für  $x \geq 0\text{ m}$  liegt bei einem Öffnungswinkel  $\vartheta = 31^\circ$  und bei  $x \leq 0\text{ m}$  bei einem Öffnungswinkel  $\vartheta = -34^\circ$ . Jedoch sollten diese Öffnungswinkel für die verwendete Ausrichtung symmetrisch sein. Der Unterschied kann auf Fertigungstoleranzen der hergestellten Wellenleiter und der unterschiedlichen Ultraschallwandler, die ebenfalls den Fertigungstoleranzen unterliegen, begründet werden. Darüber hinaus besteht auch die Möglichkeit, dass der Messaufbau einen kleinen Versatz aufweist, wodurch die theoretischen Koordinaten nicht den real angefahren Positionen entsprechen. Dennoch ist der Unterschied der Asymmetrie des Schalldrucks für  $x \geq 0\text{ m}$  und  $x \leq 0\text{ m}$  nicht signifikant und beträgt maximal  $4^\circ$ .

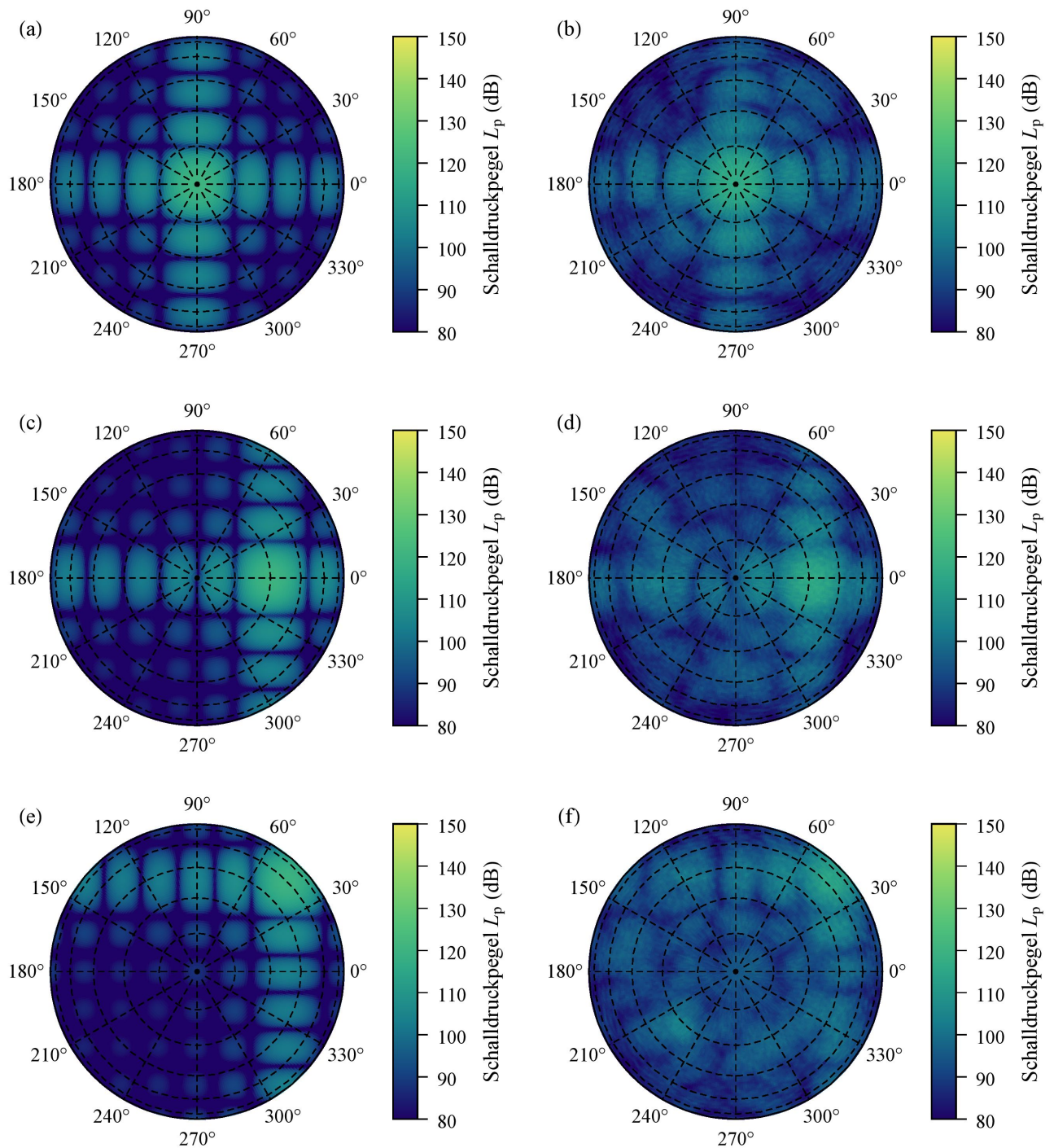
Trotz der sehr guten Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und den Messergebnissen existieren zwischen diesen Unterschiede. Diese Unterschiede werden hauptsächlich in den Nulldurchgängen deutlich. Wie bereits gezeigt wurde, bilden sich neben der harmonischen Frequenz auch Oberwellen aus. Jedoch wird in der Simulation ausschließlich die harmonische Frequenz verwendet und die Oberwellen werden vernachlässigt. Die Oberwellen besitzen zwar eine deutlich kleinere Amplitude als die harmonische Erregung (Tabelle 5.1), dennoch haben diese Oberwellen eine andere Richtcharakteristik als die harmonische Erregung. Die Messung beinhaltet jedoch alle vorhandenen Frequenzanteile der Schallausbreitung. Im Gegensatz dazu fehlen in der Simulation die höheren Frequenzanteile. Dadurch sind die Nulldurchgänge und der Schalldruck bei einem Öffnungswinkel  $\vartheta \geq 84^\circ$  bzw.  $\vartheta \leq -84^\circ$  in den Messungen nicht so ausgeprägt wie in den Simulationen. Dennoch ist die deutlich größere Amplitude der

harmonischen Frequenz dominant gegenüber den Oberwellen, sodass sich die grundsätzliche Richtcharakteristik für die harmonische Erregung ausbildet. Die Oberwellen überlagern zwar diese Richtcharakteristik, aber der wesentliche Einfluss ist hierbei die Erhöhung des Schalldrucks in den Nulldurchgängen. Auch das simulierte Schallfeld für die ausgerichtete Hauptkeule in  $\varphi_s = 0^\circ$  und  $\vartheta_s = 30^\circ$  [Abbildung 5.6 (c)] stimmt sehr gut mit den Messergebnissen [Abbildung 5.6 (d)] überein. Im Gegensatz zu den simulierten Schallfeld des ersten Falls sind für diese Ausrichtung, die Nulldurchgänge in den Messergebnissen nicht nur erhöht, sondern teilweise auch abgeschwächt dazu. Das wird beispielsweise deutlich bei dem Nulldurchgang bei einem Öffnungswinkel  $\vartheta = -15^\circ$ . Daher wirken sich die Oberwellen nicht nur konstruktiv, sondern auch destruktiv auf das resultierende Feld des Schalldrucks aus. Dennoch bildet sich auch hier die grundsätzliche Richtcharakteristik des Schalldrucks für die harmonische Erregung aus. Deshalb kann davon ausgegangen werden, dass das Modell bei der Ausrichtung der Hauptkeule in dem Volumen die physikalischen Eigenschaften richtig abbildet und somit auch zur Ansteuerung der einzelnen Ultraschallwandler verwendet werden kann.

Neben der Charakterisierung in der Ebene, bei der die Ausbreitung des Schalldrucks innerhalb des Volumens validiert wurde, erfolgt auch die Untersuchung der Ausrichtung der Schallausbreitung des angesteuerten Ultraschall Gruppenwandlers. Im Gegensatz zu den einzelnen kreisförmigen Ultraschallwandlern kann hierzu kein einzelner Halbkreis für Validierung verwendet werden, weil der Gruppenwandler keine Rotationssymmetrie aufweist. Deshalb wird die Simulation und Messung entlang einer Halbkugelschale in einem Meter Entfernung zu dem Gruppenwandler durchgeführt. Anhand dieser Validierung soll gezeigt werden, dass das Modell auch für das Ansteuern der Ultraschallwandler und somit der Ausrichtung der Hauptkeule in zwei Richtungen verwendet werden kann. Darüber hinaus wird auch die Richtcharakteristik des Gruppenwandlers in alle Richtungen für die drei beschriebenen Testfälle mit den Messergebnissen validiert. Damit wird gewährleistet, dass das Modell für die Simulation einer beliebigen Ausrichtung der Schallausbreitung verwendet werden kann und sich somit für weitere Analysen beliebiger Ultraschall Gruppenwandler eignet.

Die simulierten [Abbildungen 5.7 (a,c,e)] und gemessenen [Abbildungen 5.7 (b,d,f)] Schalldrücke auf der Oberfläche einer Halbkugel stimmen in den wesentlichen Charakteristiken überein. Dabei liegen die simulierten und gemessenen Hauptkeulen an den Positionen, die durch die Ansteuerung der Ultraschallwandler vorgegeben wurden. Auch die ersten Nebenkeulen mit den relativ großen Schalldruckpegeln werden durch die Messungen gut abgebildet und deren Lage stimmt mit den Simulationen des Schalldrucks überein. Lediglich in den Bereichen, in denen ein geringer simulierter Schalldruck vorliegt, sind die Messergebnisse deutlich größer. Das liegt im Wesentlichen daran, dass die Simulationen nur die harmonische Frequenz beinhalten, während in den Messergebnissen noch die überlagerten Oberwellen durch die Nichtlinearitäten vorkommen. Diese Oberwellen verändern das resultierende Schallfeld, sodass sich die Nulldurchgänge, wie sie bei einer reinen harmonischen Anregung vorkommen, nicht mehr ausbilden. Dadurch entstehen die Unterschiede zwischen den Simulationsergebnissen und die Messergebnissen. Dieses wird besonders bei der ausgerichteten Schallkeule sichtbar [Abbildungen 5.7 (d,f)], bei denen es großflächige Bereiche gibt an denen der Schalldruck sehr klein ist. Anhand der Überlagerung mit den Oberwellen kann die ursprüngliche Richtcharakteristik des Gruppenwandlers bei einer Erregung mit der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  nicht mehr über die gesamte Halbkugel abgebildet werden. Dieses liegt an den kleinen Schalldruckpegeln und den überlagerten Nulldurchgängen, die dadurch fließend ineinander übergehen und somit ist es nicht möglich ihre eigentliche Lage zu ermitteln.

Aus den Messergebnissen geht auch hervor, dass der gemessene Schalldruck unsymmetrisch auf der Halbkugel verläuft. Dieses wird, wie schon bei der Analyse des gemessenen Schalldrucks in der xz-Ebene beschrieben wurde, zum einen durch die Fertigungstoleranzen der Wellenleiter und zum anderen durch die unterschiedlichen Eigenschaften der verwendeten Ultraschallwandler verursacht. Darüber hinaus wirkt sich auch der Messaufbau durch einen kleinen Versatz auf die Symmetrie der Schallwellenausbreitung aus. Trotz dieser kleinen Unterschiede, ist eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und den Messergebnissen sowohl in der xz-Ebene als auch auf der Halbkugelschale vorhanden.



**Abbildung 5.7.:** Schallfeld auf einer Kugeloberfläche mit einem Abstand von einem Meter zum Mittelpunkt der Ultraschall Wandlergruppe. Das Ausrichten der Hauptkeule erfolgt bei  $\varphi = 0^\circ$  und  $\vartheta = 0^\circ$  (Abbildungen a und b),  $\varphi = 0^\circ$  und  $\vartheta = 30^\circ$  (Abbildungen c und d) und  $\varphi = 45^\circ$  und  $\vartheta = 60^\circ$  (Abbildungen e und f). Die Abbildungen a, c und e zeigen die simulierten Ergebnisse und die Abbildungen b, d und f die gemessenen Schalldruckpegel.



---

## 6 Schlussfolgerung und Ausblick

---

Die in dieser Arbeit erstellten Modelle und Simulationen zur Charakterisierung von Ultraschallwandlern basieren auf den linearisierten Grundgleichungen der Akustik. Wegen den kontinuierlichen harmonischen Signalformen sind die physikalischen Größen und deren Gesetzmäßigkeiten in den Frequenzbereich transformiert. Dadurch geht die lineare Wellengleichung in die Helmholtz Differentialgleichung über. Mit dieser Differentialgleichung beziehungsweise durch den entsprechenden Integralen wurden die Schallabstrahlung modelliert und simuliert. Dabei wurde durch die Anwendung des Green'schen Satzes das Volumenintegral in ein Randintegral überführt. Eine spezielle Form des erhaltenen Kirchhoff-Helmholtz Integrals (KHI) ist das Rayleigh Integral. Damit lässt sich, durch das Einführen einer unendlich ausgedehnten Ebene, die Abstrahlung in einem Halbraum berechnen. Für die Schallabstrahlung von kreisförmigen Kolbenstrahlern konnten zwei analytische Lösungen vorgestellt werden, welche in dieser Arbeit zur Verifikation und zur Fehlerbestimmung der entwickelten Modelle und implementierten Programmcodes verwendet wurden.

Neben den selbst erstellten Modellen und deren Implementierungen in Mathematica, wurde kommerzielle und frei erhältliche Software verwendet. Dabei wurde deren Verhalten auf die Rechenzeit und die Genauigkeit zu den analytischen Lösungen untersucht. Es wurde dabei festgestellt, dass sich die Finite Elemente Methode (FEM), wie sie beispielsweise in COMSOL (Kapitel 3.2.1) verwendet wird, zur Berechnung großer dreidimensionaler Gebiete nicht eignet. Das liegt hauptsächlich an der kompletten Diskretisierung des Rechengebiets und der anschließenden Lösung des resultierenden Gleichungssystems. Bei sehr großen Gleichungssystemen wird viel Speicherplatz benötigt und aufgrund dieses Ressourcenbedarfs kann mit dieser Methode eine Simulation des Schallfeldes auch unmöglich werden. Jedoch kann durch Reduzierung des Gebiets, zum Beispiel durch das Nutzen von Symmetrieeigenschaften, der benötigte Arbeitsspeicher und somit auch die Rechenzeit deutlich reduziert werden. Wesentlich effizienter kann das Schallfeld bei rotationssymmetrischen Anordnungen berechnet werden, weil hierbei das dreidimensionale Feld in ein zweidimensionales Feld überführt werden kann.

Ein ähnliches Problem ergibt sich, wenn das Modell mit der Finiten Zeit Differenzen Methode (FDTD), wie zum Beispiel bei k-Wave, gelöst wird. Bei dieser Methode wird ebenfalls das gesamte Gebiet diskretisiert. Jedoch wird hier nicht ein Gleichungssystem gelöst, sondern es wird bei jedem Zeitschritt das Gebiet zu den neuen Rand- und Initialisierungsbedingungen berechnet. Je nach Wellenlänge, der Größe des Rechengebiets und der Anzahl der Zeitschritte kann ein großer Speicherbedarf entstehen. Hinzu kommt die notwendige Rechenzeit zum Lösen der Wellengleichung im gesamten Gebiet.

Ein häufig verwendetes Simulationstool in der Ultraschalltechnik ist Field II (Kapitel 3.2.2), welches mit MATLAB verwendet wird. Diese Software verwendet die räumliche Impuls Antwort und es können akustische Felder sowohl mit transienten als auch harmonischen Erregungssignalen berechnet werden. Ein großer Vorteil dieser Methode ist es, dass das gesamte Gebiet nicht diskretisiert werden muss. Es müssen nur die Quellen und deren Signalform für die Erregung bekannt sein. Der gesuchte Druck für die Feldpunkte kann dann direkt berechnet werden. Jedoch bedarf es bei dieser Methode einer genauen Untersuchung zwischen der Diskretisierung und der Abtastfrequenz des Signals, da bei einer ungünstigen Kombination die Lösung einen relativ großen Fehler aufweist. Außerdem basiert dieses Simulationstool auf dem Rayleigh Integral, sodass die Lage der Ultraschallwandler in einer Ebene erfolgt.

Für die numerische Berechnung der Schallabstrahlung in einem Volumen, einem Halbraum oder für Punkte sehr weit entfernt von der Schallquelle eignen sich besonders Verfahren, bei denen nicht das gesamte Gebiet diskretisiert werden muss. Die berechneten Testfälle mit dem Programm Field II haben einen geringeren Fehler im Vergleich zu den Simulationsergebnissen aus COMSOL aufgewiesen. Des Weiteren waren auch die benötigten Rechenzeiten signifikant kleiner. Aus diesen Gründen ist bei den erhältlichen Programmen bei der Schallabstrahlung in Halbräume, sehr großen Gebieten oder aber spe-

---

zielle, einzelne, weit von der Schallquelle entfernte Punkte, auf Methoden zurückzugreifen, welche nur den Rand oder die Schallquellen an sich verwenden.

Daher wurden die eigenen Modelle in Mathematica mit Randintegralen beziehungsweise den Randelementen umgesetzt. Die in Mathematica implementierten numerischen Integrationsmethoden erlauben eine direkte numerische Berechnung der Flächenintegrale. Die Untersuchung der Methoden zum Lösen des Rayleigh Integrals ergab, dass die Gauß-Kronrod Methode sich am besten zum Berechnen des Schallfeldes eignet (Kapitel 3.3). Das liegt zum einen an dem äußerst geringen Fehler im Vergleich zu den analytischen Lösungen und zum anderen an der kürzeren Rechenzeit im Vergleich zu den übrigen Integrationstechniken. Es wurde auch festgestellt, dass die benötigte Zeit zum Berechnen des Schalldrucks für einen Feldpunkt nahe der Schallquelle viel größer ist. Zwar ist eine Berechnung mit diesen Integrationsmethoden genau, jedoch ist der Rechenaufwand umfangreich, um große dreidimensionale Gebiete in kurzer Zeit zu berechnen. Außerdem erfordert diese Methode eine Parametrierung der akustischen Schallquelle, welches nicht für beliebige Formen gewährleistet werden kann.

Aufgrund des hohen zeitlichen Aufwands zum direkten numerischen Integrieren über die gesamte Fläche mit den numerischen Integrationstechniken, welche bereits bei Mathematica implementiert sind, wurde eine Diskretisierung des Integrals und der damit verbundenen Fläche vorgenommen. Mit einer unstrukturierten Triangulierung der abstrahlenden Fläche ist das Rayleigh Integral in Teilintegrale untergliedert. Somit können zusätzlich zur Zeitersparnis auch beliebige Flächen der Schallquellen angenähert werden. Eine anschließende numerische Integration mit der Gauß'schen Quadratur für Dreiecke [63] ermöglicht eine akkurate Simulation des Schallfeldes für beliebige Feldpunkte. Für die Berechnung von mehreren Feldpunkten wurden parallel ablaufende Programme, sowohl für die CPU als auch für die GPU, entwickelt. Dabei eignet sich die Berechnung von großen Schallfeldern mit mehr als 40000 Feldpunkten besonders mit der GPU. Die gute Parallelisierbarkeit des modellierten Problems und der Einsatz einer GPU ermöglichen die Simulation von hoch aufgelösten Schallfeldern ohne die Verwendung von Interpolationen. Es können große Felder mit 40401 Feldpunkten in ungefähr einer Sekunde simuliert werden (Kapitel 3.4), weshalb von einer Simulation in Echtzeit ausgegangen werden kann. Neben der schnellen Berechnung sind die ermittelten maximalen Fehler zu den analytischen Lösungen mit  $|\varepsilon_z| = 0,53\%$  verglichen mit den anderen Simulationstools sehr gering.

Eine besser an die Realität angepasste Simulation wurde mithilfe des KHI's modelliert (Kapitel 3.5). Dabei ist im Gegensatz zum Rayleigh Integral, die angrenzende schallharte Wand um den Ultraschallwandler mit einer vorgegebenen geometrischen Abmessung berücksichtigt. Die Schallausbreitung verändert sich im Wesentlichen in den Nulldurchgängen und bei einem großen Öffnungswinkeln  $|\vartheta| > 50^\circ$  bezogen auf die Hauptachse des Ultraschallwandlers. Die Ursache für die Unterschiede sind die Dipolterme in dem KHI, welche in dem Rayleigh Integral nicht direkt vorkommen. Daher muss bei großen Öffnungswinkeln darauf geachtet werden, ob die geometrische Größe der umgebenen schallharten Wand ausreicht, um eine Simulation mit dem Rayleigh Integral durchzuführen.

Bei der Simulation mit dem KHI gibt es im Gegensatz zu dem Rayleigh Integral keine Möglichkeiten eine Verifikation durchzuführen. Deshalb wurden Modelle in COMSOL mit der BEM entwickelt, sodass die eigenen implementierten Modelle in Mathematica mit den Simulationsergebnissen aus COMSOL validiert werden können. Hierbei stimmen die jeweiligen Simulationsergebnisse sehr gut überein. Lediglich in den Nulldurchgängen unterscheiden sich die Simulationsergebnisse, weil in diesen Bereichen die Schalldrücke sehr klein sind und numerische Unterschiede sich dadurch mehr ausprägen. Auch die Vernachlässigung der Dipole auf der Mantelfläche hat einen geringfügigen Einfluss auf die Simulationsergebnisse des Schalldrucks im Volumen. Dieser Einfluss wurde bei dem Ultraschall Gruppenwandler deutlich. Ab einem Öffnungswinkel  $\vartheta = \pm 84^\circ$  unterscheiden sich die beiden simulierten Schallfelder, was sowohl an dem geringen Schalldruck in diesem Bereich liegt, als auch an den zusätzlichen Dipolanteilen des Modells in COMSOL. Ansonsten weichen die erstellten Modelle um maximal 2,5% voneinander ab. Der Vorteil des erstellten Modells in Mathematica ist die deutlich kürzere Rechenzeit im Vergleich zum Modell in COMSOL. Dabei ist diese um einen Faktor 5 bis 10 kleiner. Außerdem kann das entwickelte Modell aufgrund der ressourcensparenden Implementierung auch noch für höhere Frequenzen



---

als  $f = 40\text{ kHz}$  verwendet werden, während das erstellte Modell in COMSOL sich an der Grenze der vorhandenen Rechenleistung befindet.

Durch die Berechnung mit dem KHI ist die gesamte Rechenzeit größer geworden, da zum einen erst der Schalldruck auf der gesamten Oberfläche bestimmt werden muss und zum anderen ist die anschließende numerische Integration durch den Dipolterm aufwendiger. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei, dass nur durch die Größenänderung beziehungsweise die Berücksichtigung der geometrischen Abmessung der schallharten Wand und keine Veränderungen des Ultraschallwandlers an sich, die Schallausbreitung in dem Medium beeinflusst wird. Aus diesem Grund ist es messtechnisch wichtig, die Umgebung des Ultraschallwandlers nicht zu vernachlässigen. Deshalb empfiehlt es sich, eine möglichst große schallharte Wand für die messtechnische Charakterisierung der Ultraschallwandler zu verwenden. Damit ist eine möglichst genaue Charakterisierung des Ultraschallwandlers ohne eine große Beeinflussung der schallharten Wand gegeben.

Ein weiterer wichtiger Aspekt bei der Modellierung und Simulation ist die Berücksichtigung der Empfangsseite. Häufig werden die Schallfelder nur in einem einzelnen Feldpunkt berechnet. Jedoch ergeben sich bei der Validierung Unterschiede zwischen den Simulationen und den Messungen, weil die Empfänger wie Mikrophone eine geometrische Ausdehnung haben und nicht ein idealer Punktempfänger sind. Diese geometrische Ausdehnung beeinflusst je nach Wellenlänge und Geometrie des Empfängers die gemessenen Schalldrücke. Bisherige Modellierungen und Simulationen [14, 87] beruhen auf der Simulation des Schallfeldes für koaxiale Anordnungen von kreisförmigen Sender und Empfänger Konfigurationen. In dieser Arbeit wurde dieser Ansatz der Modellierung übernommen und auf dreidimensionale Felder erweitert (4.5), sodass eine beliebige Position und Orientierung des Empfängers beziehungsweise des Mikrophons zu dem Sender vorgenommen werden kann. Durch die Mittlung über die Empfangsseite sind die Schallfelder weniger stark ausgeprägt, da diese eine glättende Wirkung auf das abgestrahlte Schallfeld hat. Das bedeutet, dass sowohl die Nulldurchgänge nicht mehr so ausgeprägt sind wie bei einem punktförmigen Empfänger und lokale sich stark ändernde Schalldrücke, wie sie zum Beispiel im Nahfeld vorkommen, geglättet werden. Der mit dieser Methode simulierte Schalldruck entspricht zwar nicht mehr dem realen Schalldruck, der in diesem Raumpunkt vorliegt, jedoch entspricht er dem real gemessenen Schalldruck mit dem Mikrophon. Je nach Apertur und Lage des Empfängers im Verhältnis zur Wellenlänge sind die Unterschiede zwischen den zwei Modellierungen vorhanden. Um eine bessere Vergleichbarkeit zwischen den Simulationen und Messungen zu erreichen, empfiehlt es sich daher die Empfangsapertur in den Modellierungen zu berücksichtigen. Grundsätzlich ist die Simulation dieses Vierfachintegrals durch die Überlagerung der zwei Flächenintegrale aufwendiger. Dennoch ist durch die parallele Berechnung mit der GPU die Simulation des Schallfeldes in einer kurzen Zeit durchführbar. Zwar gibt es für das entwickelte Modell mit beliebigen Sender und Empfänger Konfigurationen keine Möglichkeit es zu verifizieren, aber es konnte mit Messungen validiert werden. Hierbei stimmen die simulierten Ergebnisse, unter den angenommen äußeren Bedingungen, mit den Messungen gut überein.

Abschließend wurde ein Modell für die Schallabstrahlung von Ultraschall Gruppenwandlern entwickelt. Im Gegensatz zu einem einzelnen Ultraschallwandler, bei dem das Schallfeld im Wesentlichen durch die Geometrie und die Erregung vorgegeben ist, können mit Ultraschallgruppenwandlern durch die Steuerung der Amplituden und der Phasen beziehungsweise den Zeitverzögerungen von den einzelnen Ultraschallwandlern zueinander die Schallausbreitung gezielt gesteuert werden. Durch die geeignete Berechnung der Phasenverschiebungen ist das Schwenken der Hauptkeule in zwei Richtungen durchgeführt worden. Anhand der parallelen Simulation mithilfe der GPU anstatt der CPU können mit diesem Modell viele Testberechnungen für unterschiedliche Ansteuerungen in kurzer Zeit durchgeführt werden. Dadurch existiert die Möglichkeit von virtuellen Experimenten zur Simulation der Schallausbreitung von Ultraschall Gruppenwandlern. Die Berechnung ist, verglichen mit den Messungen, welche für eine Ebene in kartesischer Darstellung mit ungefähr 40000 Feldpunkten ungefähr 22 Stunden dauert, signifikant schneller. Daher ergibt sich gerade für die Entwicklung und den Bau von Ultraschall Gruppenwandlern ein enormer zeitlicher Vorteil von zuvor durchgeführten Simulationen, um eventuelle Fehlplanungen zu vermeiden. Jedoch ist auch die anschließende messtechnische Charakterisierung sehr wichtig, da sowohl

---

Fertigungstoleranzen als auch Vereinfachungen des Modells, seien es Artefakte, äußere Gegebenheiten wie Reflexionen oder Streuungen durch Fremdkörper oder Veränderungen der Materialeigenschaften des umgebenen Mediums, nicht berücksichtigt sind. Durch die messtechnische Untersuchung von einzelnen Testfällen konnte das zuvor entwickelte Modell validiert werden und es zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Simulations- und Messergebnissen.

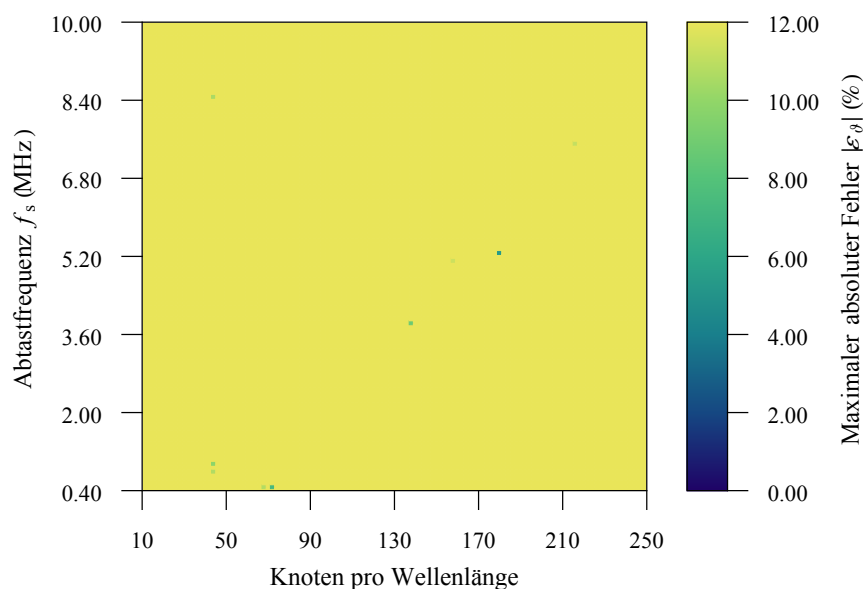
In dieser Arbeit wurde die Schallabstrahlung von Ultraschallwandlern und Gruppenwandlern modelliert und simuliert. Jedoch wurden hierbei Annahmen bei der Modellierung vorgenommen. Dazu gehören im Wesentlichen die Verteilung der Schallschnelle über die Oberfläche der akustischen Aperturen, der Vernachlässigung der Dämpfung durch das Medium und der Nichtlinearitäten in dem Medium. Bei der Messung der Ultraschallwandlers MA40B8S (Kapitel 4.7) wurde festgestellt, dass die Annahme einer homogenen Verteilung der Schallschnelle mit  $v_n = 1 \text{ ms}^{-1}$  wahrscheinlich nicht komplett zutreffend ist. Daher bedarf es weiterer messtechnischer Untersuchungen oder einer Modellbildung dieses Ultraschallwandlers, mit dem die Schallschnelle auf der Oberfläche der Ultraschallwandler bestimmt werden kann. Jedoch kann nur durch eine genaue geometrische Größe und Verteilung der Schallschnelle eine exakte Simulation durchgeführt werden. Diese experimentellen oder berechneten Daten lassen sich schnell in den entwickelten Programmcode einfügen, weil die bisherigen Werte der Schallschnelle nur mit den ermittelten Randbedingungen ersetzt werden müssen.

Des Weiteren, sollten auch die verschiedenen Erregungsformen mit unterschiedlichen Amplituden und Frequenzen des Ultraschall Gruppenwandlers untersucht werden. Es können durch verschiedene Amplituden, Frequenzen und Phasenverschiebungen die Eigenschaften der Schallausbreitung verändert werden und für den geforderten Anwendungsfall angepasst werden. Dazu gehören beispielsweise die Reduzierung des Schalldrucks in den Nebenkeulen oder eine Erhöhung des Schalldrucks in der Hauptkeule, so dass sich eine bessere Richtcharakteristik ausprägt. Auch diese Veränderung der Schallschnelle auf der Oberfläche des Gruppenwandlers könnte sehr einfach in den bestehenden Programmcode eingefügt werden.

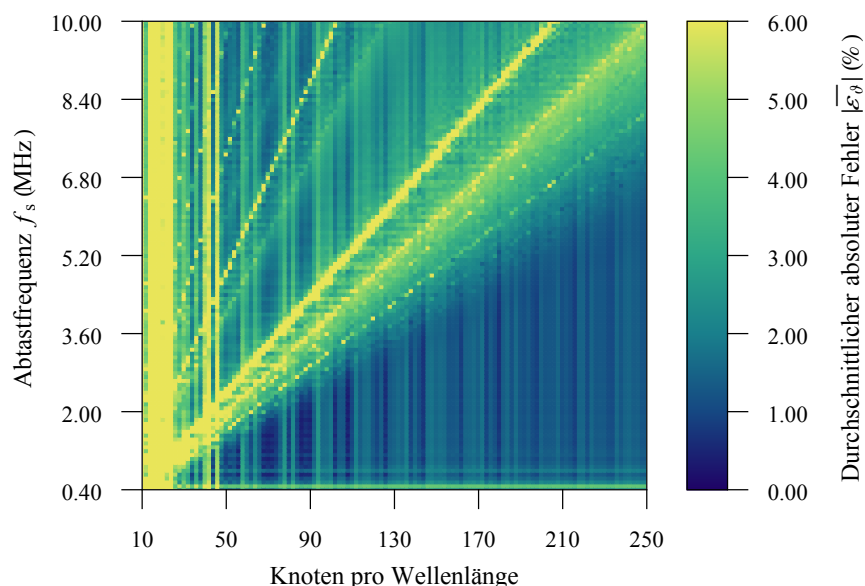
Etwas aufwändiger sind hingegen die Implementierung von Hindernissen und Fremdkörpern. Dabei müssen sowohl Reflexionen als auch Streuungen an diesen Körpern berücksichtigt werden. Insbesondere bei der genaueren Simulation des Schallfeldes für den Messplatz, in dem sich einige nicht modellierte Körper befinden, wie beispielsweise die Profile mit denen der Messplatz aufgebaut wurde, müssten exakt in deren Ausdehnung und Lage vermessen werden. Durch die Größe des Raumes und der notwendigen Knoten pro Wellenlänge würde sich der Rechenaufwand deutlich vergrößern, was in Anbetracht der bisherigen sehr guten Übereinstimmung zwischen Simulations- und Messergebnissen einen enormen Aufwand zu den möglichen verbesserten Abbildungen der physikalischen Eigenschaften führen wird. Bisher wurden ideale Bedingungen des Mediums angenommen, welche auch nahezu bei der Messung vorlagen. Jedoch können auch hier Änderungen auftreten, wie beispielsweise die Erwärmung des Raumes, wenn die Motoren, Messgeräte und die Ultraschallwandler an sich dauerhaft in Betrieb sind. Ebenso wurde die Absorption durch das Medium nicht in dem Modell berücksichtigt. Dieses wäre jedoch bei hohen Frequenzen und großen Entfernungen zwischen dem Sender und Empfänger ratsam, weil sonst durch die Absorption die Messergebnisse von den Simulationsergebnissen zu sehr abweichen würden.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die simulierten Schalldruckpegel immer für die lineare Wellengleichung gelten. Bei der Messung des Ultraschallwandlers MA40B8S und erst recht bei dem verwendeten Ultraschall Gruppenwandler (Kapitel 5.1) wurden sehr hohe Schalldruckpegel aufgenommen. Nur durch die Reduzierung der Wechselspannung für den Gruppenwandler konnte der maximale Schalldruckpegel ungefähr auf 140 dB verringert werden. Bei einer maximalen Ansteuerung dieses Gruppenwandlers lag ein sehr hoher Schalldruckpegel vor, sodass Nichtlinearitäten deutlicher wurden. Aus diesem Grund muss bei der Verwendung des entwickelten Modells darauf geachtet werden, dass der maximale Schalldruckpegel nicht über 140 dB hinaus geht. Ansonsten bedarf es einer neuen Modellierung, bei der die Nichtlinearitäten durch das Medium berücksichtigt werden.

## A Verifikation der Schallfeldsimulation im Fernfeld für das Programm Field II

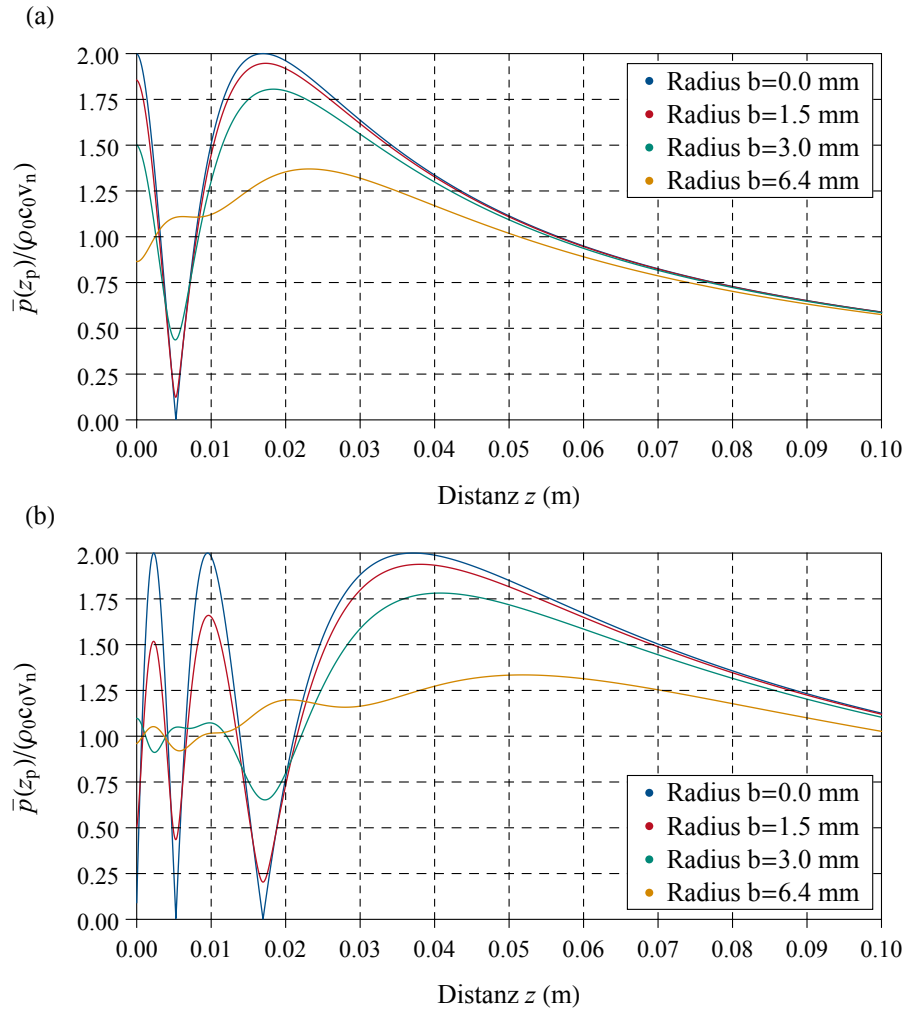


**Abbildung A.1.:** Maximaler absoluter Fehler der Schallfeldsimulation im Fernfeld für einen kreisförmigen Kolbenstrahler mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Der Kolbenstrahler wurde mit zehn Zyklen der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  angeregt.



**Abbildung A.2.:** Durchschnittlicher absoluter Fehler der Schallfeldsimulation im Fernfeld für einen kreisförmigen Kolbenstrahler mit dem Radius  $a = 6,4 \text{ mm}$  in einer unendlich ausgedehnten schallharten Wand. Der Kolbenstrahler wurde mit zehn Zyklen der Frequenz  $f = 40 \text{ kHz}$  angeregt.

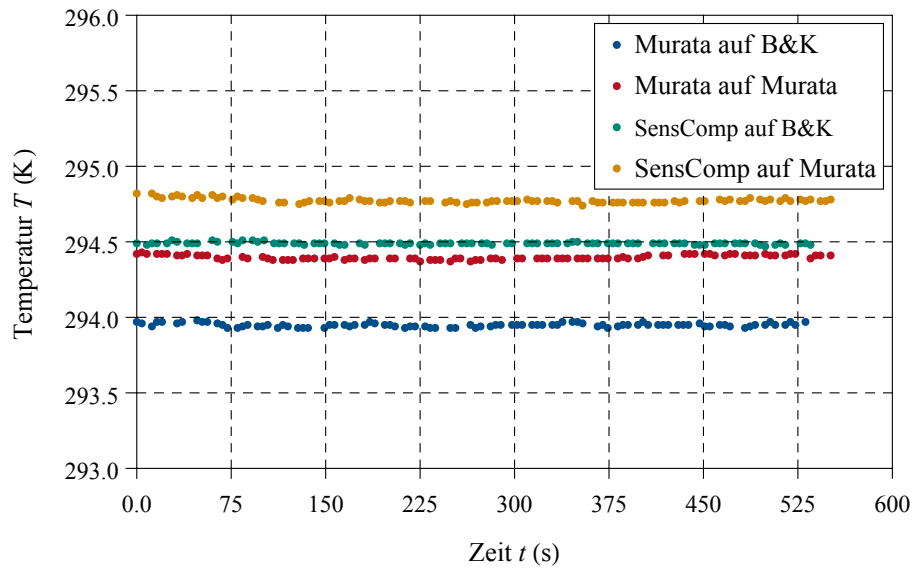
## B Simulation des Schalldrucks für koaxial ausgerichtete Sender und Empfänger



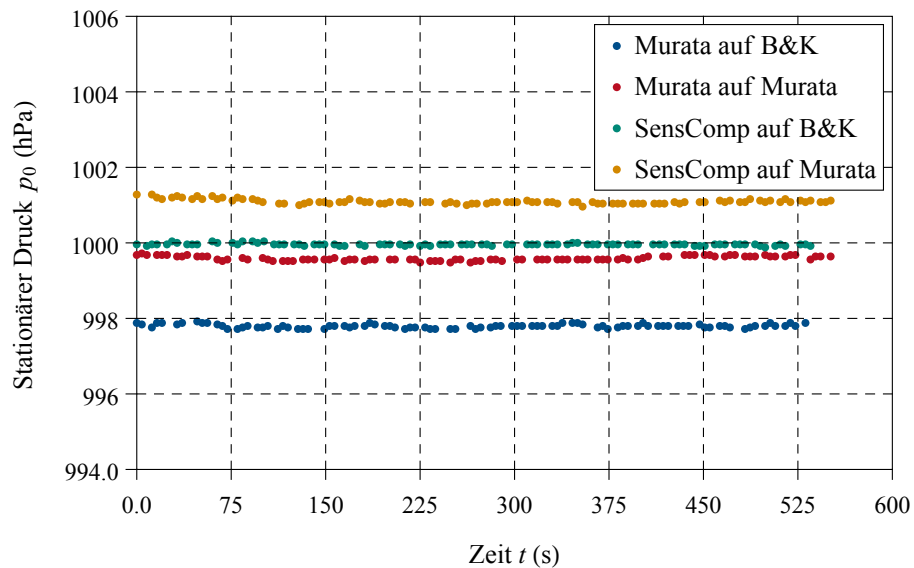
**Abbildung B.1.:** Schallwellenausbreitung entlang der  $z$ -Achse eines kreisförmigen Ultraschallwandlers mit einem Radius  $a = 12,8$  mm für die Erregungsfrequenzen  $f = 40$  kHz (a) und  $f = 80$  kHz (b). Die Empfänger haben einen Radius von  $b = 1,5$  mm,  $b = 3,0$  mm und  $b = 6,4$  mm und sind zum Sender koaxial ausgerichtet. Der Radius  $b = 0$  mm entspricht der analytischen Lösung eines punktförmigen Empfängers.

## C Messergebnisse für die koaxiale Anordnung von Sender und Empfänger Konfigurationen

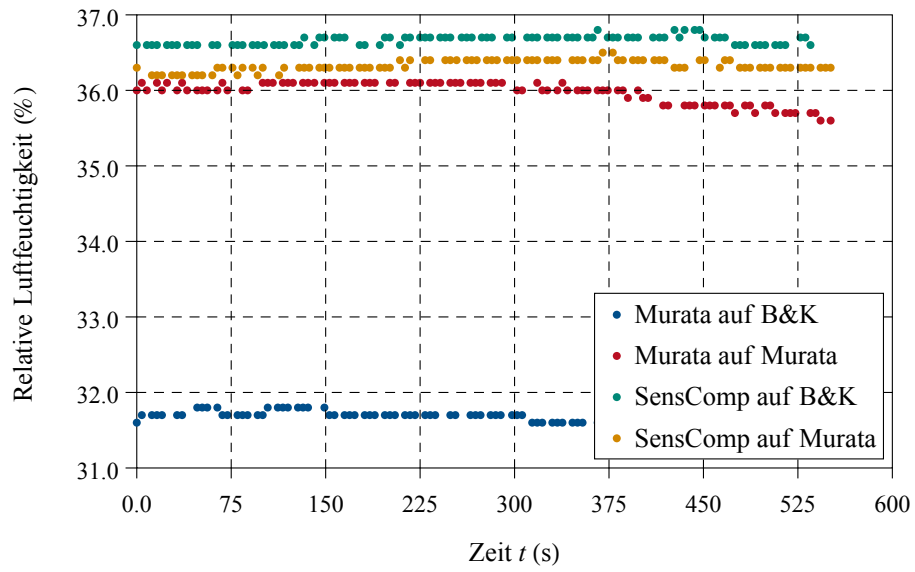
### C.1 Messung der physikalischen Eigenschaften der umgebenen Luft



**Abbildung C.1.:** Gemessene Temperatur der umgebenen Luft während der Schallfeldmessungen für die koaxialen Anordnungen von dem Sender und Empfänger (Kapitel 4.4).



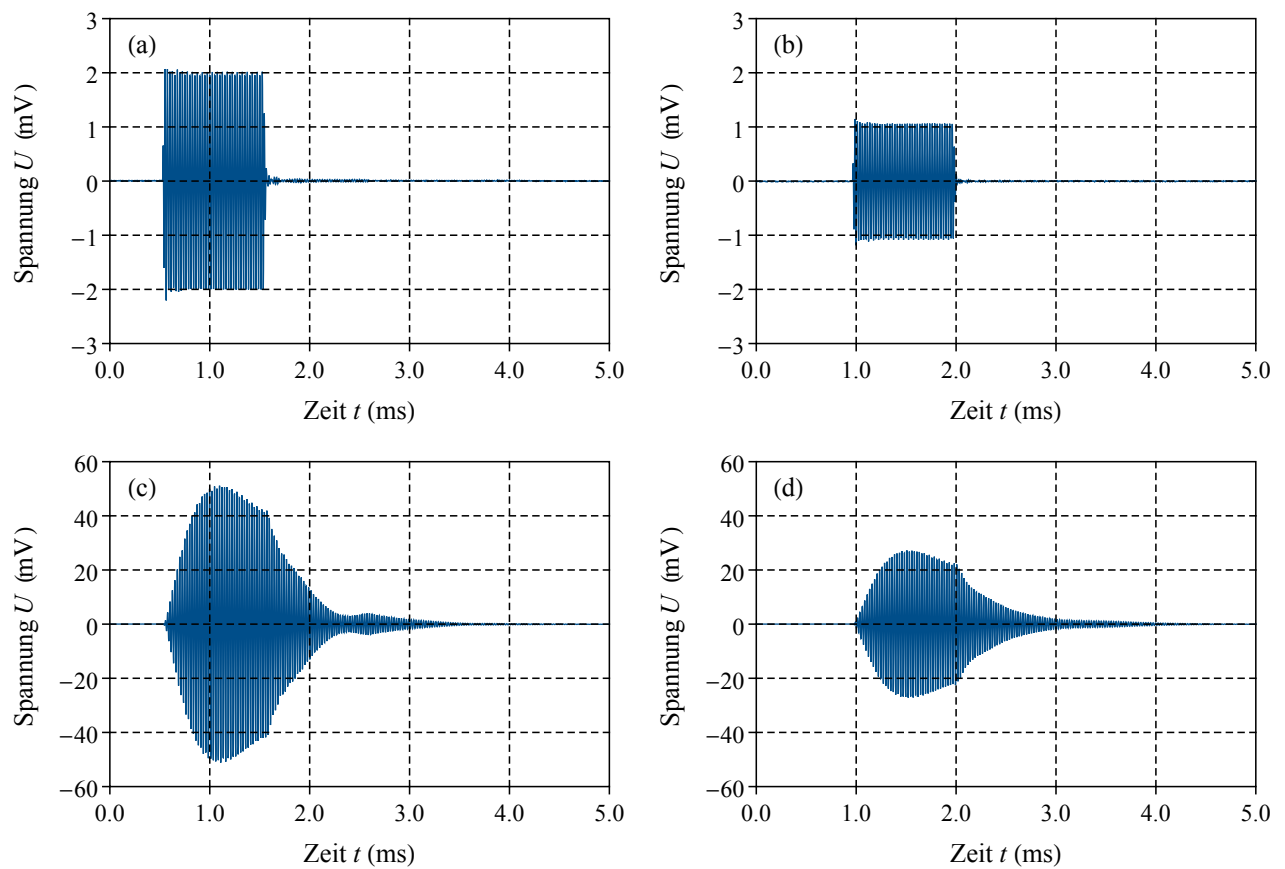
**Abbildung C.2.:** Gemessener stationärer Druck der umgebenen Luft während der Schallfeldmessungen für die koaxialen Anordnungen von dem Sender und Empfänger (Kapitel 4.4).



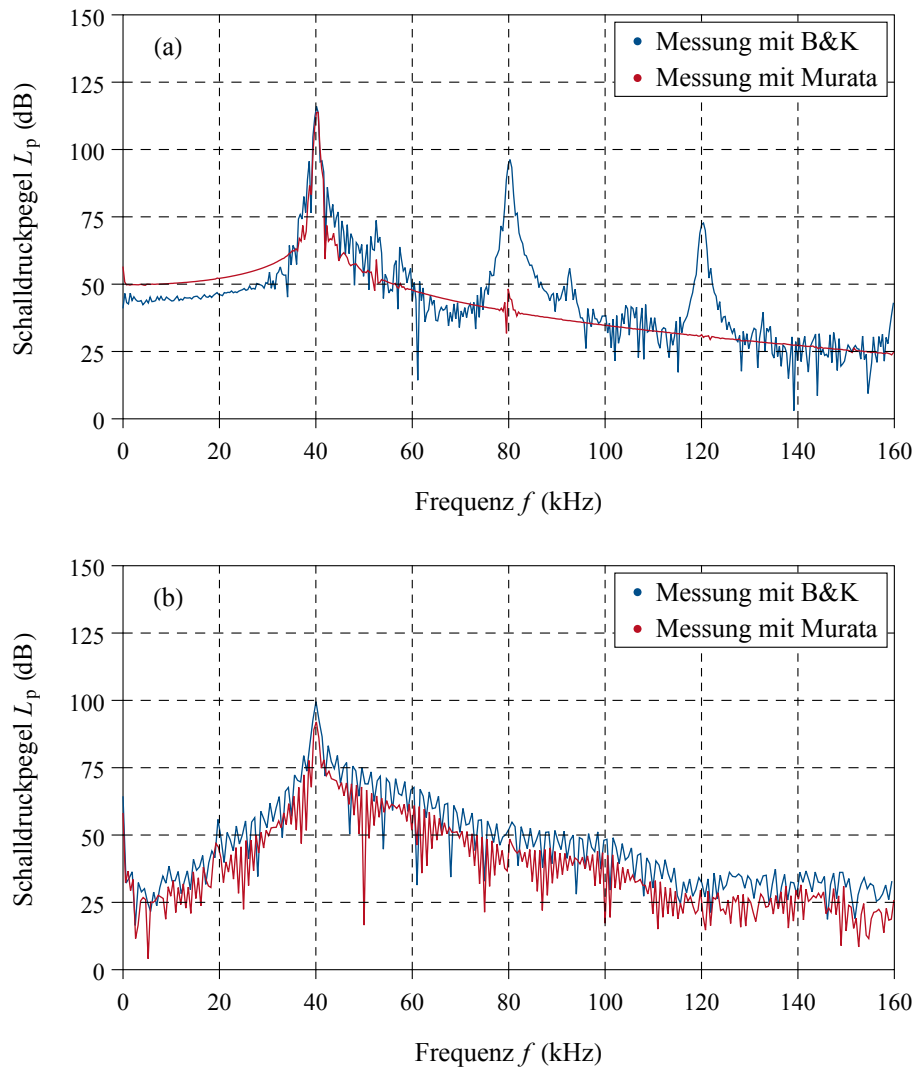
**Abbildung C.3.:** Gemessene relative Luftfeuchtigkeit der umgebenen Luft während der Schallfeldmessungen für die coaxialen Anordnungen von dem Sender und Empfänger (Kapitel 4.4).



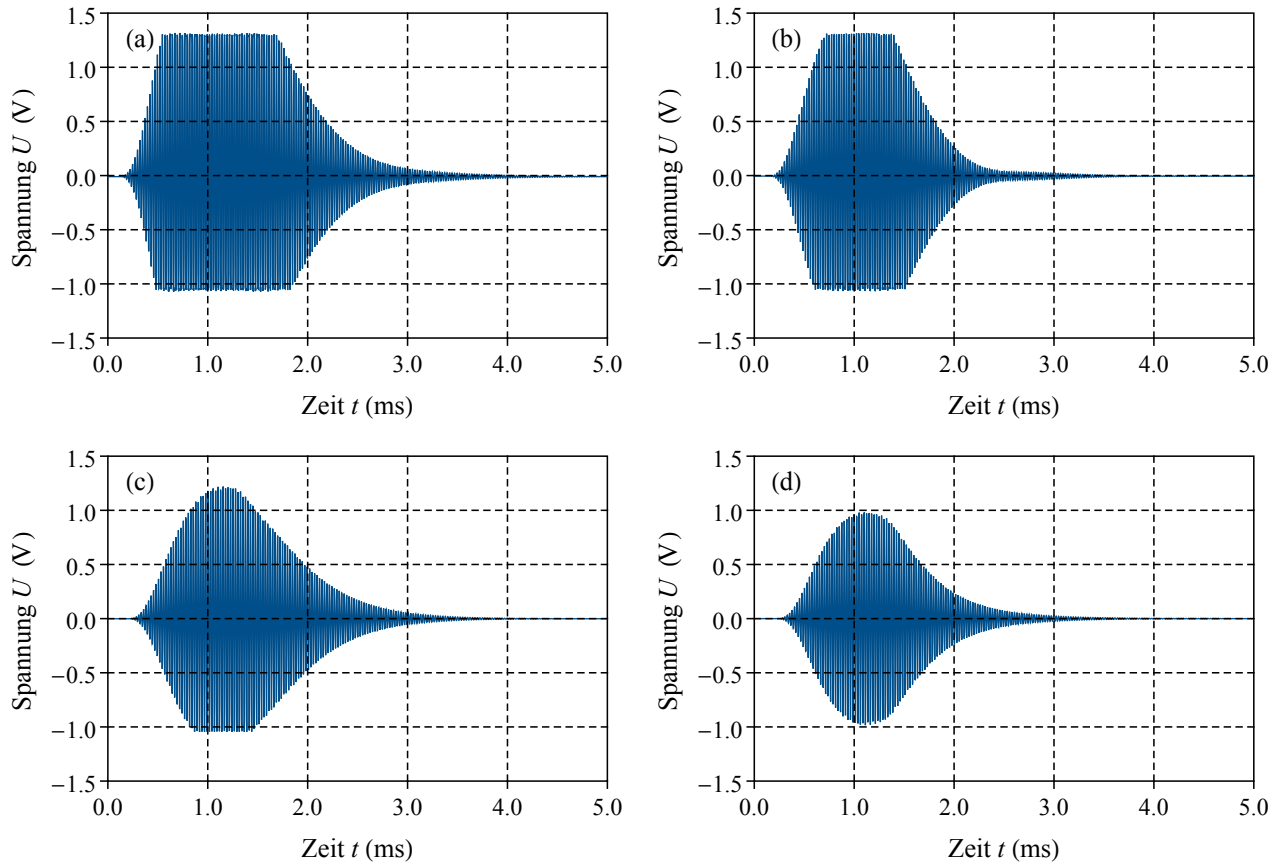
## C.2 Schalldruckmessung von coaxialer Sender und Empfänger Anordnungen



**Abbildung C.4.:** Messung des zeitlichen Signalverlaufs von dem schallaussendenden Murata MA40B8S in einem Abstand von  $z_p = 150$  mm (a) und (c) und einem Abstand  $z_p = 300$  mm (b) und (d). Die gemessene Spannung erfolgte für (a) und (b) mit Mikrofon B&K 4138 und für (c) und (d) mit einem Murata MA40B8R mit dem Radius  $b = 6.4$  mm.



**Abbildung C.5.:** Überführung der Zeitsignale in den Frequenzbereich mit der FFT und anschließender Umrechnung in den Schalldruckpegel. Die Sender und Empfänger sind für diesen Frequenzverlauf 300 mm voneinander entfernt. Als Sender wurde der Murata MA40B85 (a) und der SensComp600 (b) verwendet.



**Abbildung C.6.:** Gemessener Spannungsverlauf für eine koaxial ausgerichtete Sender und Empfänger Konfiguration. Der Ultraschallwandler MA40B8S wurde mit einer Wechselspannung mit der Amplitude  $V_{pp} = 20\text{ V}$  und der Frequenz  $f = 40\text{ kHz}$  betrieben. Die Messung des Schallsignals wurde mit dem Ultraschallwandler MA40B8R in den Entfernungen 20 mm (a), 30 mm (b), 50 mm (c) und 56 mm (d) zum Sender durchgeführt.

---

## Literatur

---

- [1] M. D. Verweij u. a. “Simulation of Ultrasound Fields”. In: *Comprehensive Biomedical Physics*. Hrsg. von D. Panetta und M. Demi. Bd. 2. Elsevier, 2014, S. 465–500. DOI: 10.1016/B978-0-444-53632-7.00221-5.
- [2] J. Krautkrämer und Herbert Krautkrämer. *Werkstoffprüfung mit Ultraschall*. Springer-Verlag, 1975. ISBN: 9780387069012.
- [3] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf. *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*. Springer, 2009. ISBN: 9783540234302.
- [4] I. Ohya, A. Kosaka und A. Kak. “Vision-based navigation by a mobile robot with obstacle avoidance using single-camera vision and ultrasonic sensing”. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 14.6 (1998), S. 969–978. DOI: 10.1109/70.736780.
- [5] M. Kupnik u. a. “An ultrasonic transit-time gas flowmeter for automotive applications”. In: *SENSORS, 2004 IEEE*. 2004, 451–454 vol.1.
- [6] T. Kamigaki, A. Noda und H. Shinoda. “Thin and flexible airborne ultrasound phased array for tactile display”. In: *2017 56th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*. 2017, S. 736–739.
- [7] Keisuke Hasegawa u. a. “Electronically steerable ultrasound-driven long narrow air stream”. In: *Applied Physics Letters* 111.6 (2017), S. 064104. DOI: 10.1063/1.4985159.
- [8] Ayumu Watanabe, Koji Hasegawa und Yutaka Abe. “Contactless Fluid Manipulation in Air: Droplet Coalescence and Active Mixing by Acoustic Levitation”. In: *Scientific Reports* 8.1 (2018), S. 10221.
- [9] C. Shi und W. Gan. “Development of Parametric Loudspeaker”. In: *IEEE Potentials* 29.6 (2010), S. 20–24. ISSN: 0278-6648.
- [10] L. Gaul und C. Fiedler. *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783834825377.
- [11] R. Bolejko und A. Dobrucki. “FEM and BEM computing costs for acoustical problems”. In: *Archives of Acoustics* 31.2 (2006).
- [12] Bradley Treeby und Ben Cox. “k-Wave short course”. Kurs im Rahmen der IEEE IUS 2017 Konferenz. 2017.
- [13] Per-Olof Persson und Gilbert Strang. “A Simple Mesh Generator in MATLAB”. In: *SIAM Review* 46 (2004), S. 2004.
- [14] K. Beissner. “Exact Integral Expression for the Diffraction Loss of a Circular Piston Source”. In: *Acta Acustica united with Acustica* 49 (1981), S. 212–217.
- [15] R. Golinske u. a. “Calculation of diffraction loss between non-co-axial ultrasonic transducer configurations”. In: *2013 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. 2013, S. 2171–2174.
- [16] R. Golinske u. a. “Diffraction loss calculation based on boundary element method for an air-coupled phased array”. In: *2015 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. 2015, S. 1–4.
- [17] E. Konetzke u. a. “Phased array transducer for emitting 40-kHz air-coupled ultrasound without grating lobes”. In: *2015 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. 2015.
- [18] A. Jäger u. a. “Air-coupled 40-kHz ultrasonic 2D-phased array based on a 3D-printed waveguide structure”. In: *2017 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS)*. 2017.

- 
- [19] Wolfram Research, Inc. *Mathematica, Version 10.0*. Champaign, IL, 2014.
- [20] Wolfram Research, Inc. *Mathematica, Version 11.0*. Champaign, IL, 2016.
- [21] *MATLAB 9.1 (R2016b)*. Natick, Massachusetts: The Mathworks, Inc., 2016.
- [22] *COMSOL Multiphysics® v. 5.2a*, [www.comsol.com](http://www.comsol.com). Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2016.
- [23] *COMSOL Multiphysics® v. 5.3a*, [www.comsol.com](http://www.comsol.com). Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2017.
- [24] J.A. Jensen. “Field: A Program for Simulating Ultrasound Systems”. In: *10th Nordic-Baltic Conference on Biomedical Imaging Published in Medical Biological Engineering Computing* 34 (1996), S. 351–353.
- [25] J.A. Jensen und N.B. Svendsen. “Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers”. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 39.2 (1992), S. 262–267.
- [26] A.D. Pierce. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1989. ISBN: 9780883186121.
- [27] L.E. Kinsler. *Fundamentals of acoustics*. Wiley, 2000. ISBN: 9780471847892.
- [28] Leonard Euler. “Principes généraux du mouvement des fluides”. In: *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin* 11 (1757), S. 274–315.
- [29] D.T. Blackstock. *Fundamentals of Physical Acoustics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 2000. ISBN: 9780471319795.
- [30] *ISO 8778:2003: Pneumatic fluid power – Standard reference atmosphere*. Norm. 2003.
- [31] B. Klose. *Meteorologie: Eine interdisziplinäre Einführung in die Physik der Atmosphäre*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 9783662436226.
- [32] Leo L. Beranek und T. Mellow. *Acoustics: Sound Fields and Transducers*. Elsevier Science, 2012. ISBN: 9780123914866.
- [33] A. Kost. *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 1994. ISBN: 9783642579103.
- [34] G. Müller und M. Möser. *Numerische Methoden der Technischen Akustik*. Fachwissen Technische Akustik. Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 9783662554081.
- [35] A.J. Berkhout. *Applied seismic wave theory*. Advances in exploration geophysics Bd. 1. Elsevier, 1987. ISBN: 9780444428998.
- [36] A.D. Polyanin. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. CRC Press, 2001. ISBN: 9781420035322.
- [37] M. Möser. *Technische Akustik*. VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg, 2015. ISBN: 9783662477045.
- [38] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*. Bd. 2. MACMILLAN und CO., LTD., 1896.
- [39] S. Marburg und B. Nolte. *Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids - Finite and Boundary Element Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 9783540774488.
- [40] S.W. Rienstra. *Fundamentals of duct acoustics: notes of course "Progress in Simulation, Control and Reduction of Ventilation Noise"*. VKI Lecture Series. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2016. ISBN: 978-2-87516-098-0.
- [41] J.A. Schetz und A.E. Fuhs. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1999. ISBN: 9780471348566.
- [42] L. B. Evans, H. E. Bass und L. C. Sutherland. “Atmospheric Absorption of Sound: Theoretical Predictions”. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 51.5B (1972), S. 1565–1575.
-

- 
- [43] H. E. Bass, L. C. Sutherland und A. J. Zuckerwar. "Atmospheric absorption of sound: Update". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 88.4 (1990), S. 2019–2021.
- [44] H. E. Bass u. a. "Atmospheric absorption of sound: Further developments". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 97.1 (1995), S. 680–683.
- [45] F. Dunn u. a. *Springer Handbook of Acoustics*. Hrsg. von T. D. Rossing. Springer Handbooks. Springer New York, 2015. ISBN: 9781493907557.
- [46] *Handbook of Engineering Acoustics*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783540694601.
- [47] H.P. Langtangen und G.K. Pedersen. *Scaling of Differential Equations*. Simula SpringerBriefs on Computing. Springer International Publishing, 2016. ISBN: 9783319327259.
- [48] B.C. Günther, K.H. Hansen und I. Veit. *Technische Akustik - Ausgewählte Kapitel: Grundlagen, aktuelle Probleme und Meßtechnik*. Kontakt & Studium. Expert-Verlag, 2002. ISBN: 9783816920373.
- [49] Bradley E. Treeby und Benjamin T. Cox. "k-Wave: MATLAB toolbox for the simulation and reconstruction of photoacoustic wave fields". In: *Journal of Biomedical Optics* 15.2 (2010), S. 1 –12. DOI: 10.1117/1.3360308.
- [50] J.A. Jensen. *Users' guide for the Field II program*. 2014.
- [51] F. Oberhettinger. "On Transient Solutions of the "Baffled Piston" Problem". In: *JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-B. Mathematics and Mathematical Physics* 65B (1961).
- [52] G. E. Tupholme. "Generation of acoustic pulses by baffled plane pistons". In: *Mathematika* 16.2 (1969), 209–224.
- [53] P. R. Stepanishen. "The Time Dependent Force and Radiation Impedance on a Piston in a Rigid Infinite Planar Baffle". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 49.3B (1971), S. 841–849.
- [54] Peter R. Stepanishen. "Transient Radiation from Pistons in an Infinite Planar Baffle". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 49.5B (1971), S. 1629–1638.
- [55] J.A. Jensen. *Linear description of ultrasound imaging systems*. Notes for the International Summer School on Advanced Ultrasound Imaging Technical University of Denmark. 2001.
- [56] Eric W. Weisstein. "Gauss-Kronrod Quadrature." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Gauss-KronrodQuadrature.html>, Letzter Aufruf der Internetseite: 13.11.2018.
- [57] Eric W. Weisstein. "Lobatto Quadrature." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LobattoQuadrature.html>, Letzter Aufruf der Internetseite: 13.11.2018.
- [58] Robert Piessens und Maria Branders. "Computation of oscillating integrals". In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 1.3 (1975), S. 153 –164.
- [59] Eric W. Weisstein. "Newton-Cotes Formulas." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html>, Letzter Aufruf der Internetseite: 13.11.2018.
- [60] Wolfram Research, Inc. *NIntegrate Integration Strategies*. <https://reference.wolfram.com/language/tutorial/NIntegrateIntegrationStrategies.html>, Letzter Aufruf der Internetseite: 13.11.2018.
- [61] David Levin. "Fast integration of rapidly oscillatory functions". In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 67.1 (1996), S. 95 –101.
- [62] Eric W. Weisstein. "Monte Carlo Integration." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MonteCarloIntegration.html>, Letzter Aufruf der Internetseite: 13.11.2018.



- 
- [63] D.A. Dunavant. "High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21 (1985), S. 1129–1148.
- [64] G. R. Cowper. "Gaussian quadrature formulas for triangles". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7.3 (1973), S. 405–408.
- [65] Peter M. Juhl. "The Boundary Element Method for Sound Field Calculations". Diss. The Acoustics Laboratory, Technical University of Denmark, 1993.
- [66] Rob Opdam u. a. "Frequency and geometry dependent automated optimized meshing algorithm for a boundary element simulation". In: *DAGA 2014–40. Deutsche Jahrestagung für Akustik* (2014), S. 375–376.
- [67] Jonathan Richard Shewchuk. "Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator". In: *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*. Hrsg. von Ming C. Lin und Dinesh Manocha. Bd. 1148. Lecture Notes in Computer Science. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry. Springer-Verlag, 1996, S. 203–222.
- [68] Hoa Nguyen u. a. "Constrained CVT meshes and a comparison of triangular mesh generators". In: *Computational Geometry* 42.1 (2009), S. 1–19.
- [69] Philippe P. Pébay und Timothy J. Baker. "Analysis of Triangle Quality Measures". In: *Mathematics of Computation* 72.244 (2003), S. 1817–1839.
- [70] David A. Field. "Qualitative measures for initial meshes". In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47.4 (2000), S. 887–906.
- [71] Jonathan Richard Shewchuk. *What Is a Good Linear Finite Element? - Interpolation, Conditioning, Anisotropy, and Quality Measures*. Techn. Ber. In Proc. of the 11th International Meshing Roundtable, 2002.
- [72] M. Ochmann und F. P. Mechel. "Analytical and Numerical Methods in Acoustics". In: *Formulas of Acoustics*. Hrsg. von Fridolin P. Mechel. Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 930–1023.
- [73] M.L. Munjal u. a. *Formulas of Acoustics*. Formulas of acoustics Bd. 2. Springer Berlin Heidelberg, 2004. ISBN: 9783540425489.
- [74] Gordon C. Everstine und Francis M. Henderson. "Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction". In: *Acoustical Society of America Journal* 87 (1990), S. 1938–1947.
- [75] Murata. *SENSORS, ULTRASONIC SENSORS MA40 SERIES*. Datenblatt.
- [76] Murata. *Ultrasonic Sensor, Application Manual*. Datenblatt.
- [77] Inc. SensComp. *Series 600 Instrument Grade Ultrasonic Sensor*. Datenblatt.
- [78] Brüel & Kjær. *Spezifische Daten der Mikrophoneinheit vom Typ 4138-A-015*. Kalibrierungsblatt nach IEEE P1451.4.
- [79] Ltd Aosong Electronics Co. *Temperature and humidity module*. Datenblatt, AM2302 Product Manual.
- [80] Bosch Sensortec GmbH. *BMP 180, Digital pressure sensor*. Datenblatt, Document Number: BST-BMP180-DS000-12. 2015.
- [81] F W Kremkau. "Multiple-element transducers." In: *RadioGraphics* 13.5 (1993), S. 1163–1176.
- [82] A.G. Webb. *Introduction to Biomedical Imaging*. IEEE Press Series on Biomedical Engineering. Wiley, 2017. ISBN: 9781119485940.
- [83] Frederic Reverdy, G Ithurrealde und Nicolas Dominguez. "Advanced Ultrasonic 2D Phased-Array Probes". In: *18th World Conference on Nondestructive Testing* (2018).

- 
- [84] H. Medwin und C.S. Clay. *Fundamentals of Acoustical Oceanography*. Applications of Modern Acoustics. Elsevier Science, 1997. ISBN: 9780080532165.
  - [85] O. T. Von Ramm und S. W. Smith. “Beam Steering with Linear Arrays”. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* BME-30.8 (1983), S. 438–452.
  - [86] I.N. Bronstein, G. Musiol und K.A. Semendjaev. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2008. ISBN: 9783817120079.
  - [87] A. Goldstein, D. R. Gandhi und W. D. J. O’Brien. “Diffraction phenomena with co-axial plane piston transducers”. In: *1994 Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium*. Bd. 3. 1994, 1757–1760 vol.3.

---

## Wissenschaftlicher Werdegang

---



**René Golinske**

geboren am 22. Juni 1988 in Oranienburg

---

### Studium

10/2008-01/2013      Brandenburgische Technische Universität Cottbus  
Studiengang: Elektrotechnik  
Studienrichtung: Automatisierungstechnik und Antriebssysteme  
Abschluss: Diplom-Ingenieur

---

### Berufliche Tätigkeiten

seit 02/2013      Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg  
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik

---

### Praktikum und Diplomand

02/2012-07/2012      Diplomand  
Daimler AG, Mercedes Benz Cars  
Stuttgart Untertürkheim  
08/2011-01/2012      Fachpraktikum  
Daimler AG, Mercedes Benz Cars  
Stuttgart Untertürkheim

---

### Sonstiges

10/2009-07/2011      Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl Angewandte Mathematik  
Brandenburgische Technische Universität Cottbus  
Lehrstuhl Angewandte Mathematik